

GRUNDLAGEN
EINER
INDEPENDENTEN THEORIE
DER
ELLIPTISCHEN MODULFUNCTIONEN
UND
THEORIE
DER
MULTIPLICATOR-GLEICHUNGEN ERSTER STUFE.

INAUGURALDISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE
AN DER
UNIVERSITÄT LEIPZIG
EINGEREICHT VON
ADOLF HURWITZ.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1881.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

SEINEM LIEBEN ONKEL

HERRN

E. EDWARDS

IN DANKBARKEIT GEWIDMET

VOM

VERFASSER.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY

ASTOR LENOX TILDEN FOUNDATION

500 FIFTH AVENUE

NEW YORK

1900

Die vorliegende Arbeit zerfällt in zwei Theile. — Einmal ist (im I. Abschnitt) der Versuch gemacht, die vollständigen Grundlagen einer unabhängigen Theorie der *elliptischen Modulfunctionen**) zu entwickeln, andererseits wird (im II. Abschnitt) eine Classe von Gleichungen untersucht, die bei diesen Functionen eine Rolle spielt.

Diese Gleichungen — die neuen Multiplicatorgleichungen der Herren Klein und Kiepert — bildeten den Ausgangspunkt der Arbeit.

Herr Klein, durch seine Untersuchungen über Modulfunctionen auf dieselben geführt, veröffentlichte auf sie bezüglich eine kurze, nur Resultate enthaltende Note.***) Herr Kiepert gelangte von Seiten der doppeltperiodischen Functionen zu denselben Resultaten, indem er sich auf die Eigenschaften der Weierstrass'schen Functionen σ und p stützte.***). Dabei ist zu erwähnen, dass auch Herrn Brioschi's kurz vorher erschienene Arbeit: *Sopra una classe di equazioni modulari* (Annali di matematica Bd. 9, pag. 167) sich implicite auf dieselben Gleichungen bezieht.

Herr Klein fand neuerdings nicht die Zeit, seine die Multiplicatorgleichungen betreffenden Resultate einer eingehenden und seinen übrigen Entwicklungen in der Theorie der Modulfunctionen conformen Begründung zu unterziehen. So unternahm ich denn, auf Anregung von Herrn Klein, die Untersuchung der Gleichungen, wie sie in einer independenten Theorie der Modulfunctionen verlangt werden muss.

Bald kam ich jedoch dazu auf die Grundlagen dieser Theorie zurückzugreifen, und so entwickelte sich der erste Abschnitt der vorliegenden Arbeit, der bestimmt ist, einige in den Grundlagen noch vorhandene Lücken auszufüllen.

*) Dieser Name rührt wohl von Herrn Dedekind her; wir wollen diese Functionen im Folgenden kurz als „Modulfunctionen“ bezeichnen.

**) Brief an Brioschi vom 30. Dec. 1878, mitgetheilt in den Rendiconti del Instituto Lombardo vom 2. Januar 1879; abgedruckt, so weit er hier in Betracht kommt, Mathem. Annalen Bd. XV, p. 86—88. — In der Folge beziehen sich alle Citate, die nur aus Ortsangabe bestehen, auf Klein'sche Arbeiten.

***). „Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen.“ Crelle Bd. 87, p. 199.

Die moderne Auffassung der Modulfunctionen basirt bekanntlich auf einer geometrischen Figur*), die in der Ebene der complexen Variabeln ω die linearen ganzzahligen Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

repräsentirt.

Man wird hier verlangen dürfen, dass man auf directem Wege von den linearen Substitutionen zu der sie repräsentirenden geometrischen Figur gelange.

Herr Dedekind giebt (l. c. pag. 271) einen Theil eines synthetisch geführten Beweises des Zusammenhanges der Transformationen mit jener Figur und erwähnt, dass man die nöthigen Beweise der Theorie der Reduction der quadratischen Formen entnehmen kann.

Die *im ersten Capitel des ersten Abschnitts* vorliegender Arbeit gegebene Begründung der Figur dürfte insofern eine befriedigende sein, als sie, mit wenigen elementaren Ueberlegungen operirend, mit einer gewissen Nothwendigkeit von den Transformationen zu der Figur hinführt. Dass hiermit auch eine überaus einfache Behandlungsweise der Reduction der quadratischen Formen gewonnen ist, liegt auf der Hand.

Einen wesentlichen Bestandtheil dieses ersten Capitels bildet die von Herrn Klein herrührende, wichtige Theorie der Fundamentalpolygone, welche zu den in der Gesamtheit der linearen Transformationen enthaltenen Untergruppen gehören. — Als neu möchte ich hier die (allerdings nicht ins Detail ausgeführte) Methode bezeichnen, wie man eine Transformation irgend einer Untergruppe aus den erzeugenden Substitutionen zusammensetzen kann. Dieselbe liefert, von der geometrischen Anschauung ins Arithmetische übersetzt, eine eigenthümliche Art von Kettenbruchentwicklung.

Im *zweiten Capitel des ersten Abschnitts* werden durch directe Processe analytische Entwicklungen für die Modulfunctionen hergestellt.

*) Wegen derselben vergleiche man die unter sich zusammenhängenden Arbeiten von Schwarz (Crelle, Bd. 75, p. 292: *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes ist*), Dedekind (Crelle Bd. 83, p. 265: *Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*), Klein (Mathematische Annalen Bd. XIV—XVII).

Neben diese stellt sich unabhängig eine Arbeit von Stephen Smith aus dem Jahre 1877 (Atti della Accademia dei Lincei).

Herr Klein hat schon vor längerer Zeit die interessante Bemerkung gemacht, dass sich diese Figur im Princip bereits im Gauss'schen Nachlass Bd. 3, p. 477, 478 vorfindet. Es wird dort angegeben, dass die Function $\kappa^2(\omega)$ jeden Werth ein Mal und nur ein Mal in einem Raume annimmt, der in der ω -Ebene von zwei Geraden und zwei Halbkreisen begrenzt ist.

Obgleich die hierbei zur Verwendung kommenden Gedanken nicht wesentlich von den in der Theorie der elliptischen Functionen benutzten verschieden sind, so habe ich doch geglaubt diese Entwicklungen ausführlich darstellen zu sollen. So natürlich sich nämlich diese Betrachtungen bei der nachstehend gegebenen Darstellungsweise gestalten, so haben verschiedene Mathematiker gerade hier wesentliche Schwierigkeiten und Hemmungen gefunden.*)

Ein bekannter Ansatz führt zunächst zu solchen homogenen Functionen zweier Variabeln, den *Modulformen*, welche die *homogenen* linearen ganzzahligen Substitutionen der Determinante 1 zulassen, und aus denen somit durch Quotientenbildung *Modulfunctionen* abgeleitet werden können. Es gelingt sodann leicht, die als unendliche Summen definirten Functionen in Potenzreihen umzusetzen.

Eine dieser Summen bleibt, wegen ihrer bedingten Convergenz, bei den linearen homogenen Substitutionen nicht vollkommen ungeändert, erfährt aber bei denselben doch nur eine einfache Modification ihres Werthes. Ihre exponentielle Integration führt direct zum Endziele, zu der Function Δ in ihrer Productentwicklung, deren fundamentale Bedeutung für die Theorie der Modulfunctionen Herr Dedekind mit Recht wiederholt hervorgehoben hat.**)

Der *zweite Abschnitt* meiner Arbeit handelt, wie erwähnt, von den neuen Multiplicatorgleichungen.

Er ist wieder in zwei Capitel getheilt, von denen das erste dem Nachweis der *Existenz* der Gleichungen gewidmet ist, während im zweiten Capitel einige Eigenschaften der Gleichungen abgeleitet werden.

Neu sind in diesem Abschnitt: die Allgemeinheit der Entwicklungen — indem die Gleichungen für beliebig zusammengesetzte Transformationsgrade hergeleitet und untersucht werden, während die Arbeiten von Kiepert und Klein nur primzahlige Transformationen in Betracht ziehen —, ferner der § 5. des zweiten Capitels und sämtliche Be-

*) Hermite sagt z. B. in der *Uebersicht der Theorie der elliptischen Functionen* (im Anhang zur sechsten Ausgabe von Lacroix's *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral*) pag. 40 der deutschen Ausgabe (von Natani, Berlin 1863), dass es „bei dem jetzigen Standpunkt der analytischen Kenntnisse“ unmöglich schiene, die Functionen $\kappa(\omega)$ und $\kappa'(\omega) = \sqrt{1 - \kappa^2(\omega)}$ vollständig zu behandeln, ohne auf die Functionen Θ und H zu recurriren.

Sodann bemerkt Herr Dedekind, l. c. pag. 285 unten: „Allein es ist mir bisher nicht geglückt, diese Darstellung von $\eta(\omega)$ als explicite Function von ω lediglich aus ihrer obigen Definition, also ohne die Hülfe der Theorie der ϑ Functionen abzuleiten.“

**) Riemann's Werke pag. 438 und l. c.

weisführungen, die sich jedoch zum grossen Theil auf die von Herrn Klein ausgebildeten Methoden stützen.

Auf den mir vorab noch zu fern liegenden Umstand, dass unsere Gleichungen „Jacobi'sche“ Gleichungen sind, d. h. dass zwischen den Quadratwurzeln aus den Wurzeln unserer Gleichungen die zuerst von Jacobi bemerkten linearen Relationen bestehen, bin ich nicht eingegangen.

Schliesslich möchte ich noch erwähnen, dass ich durch den persönlichen Verkehr mit Herrn Professor Klein, dem ich die anregendste und förderndste Theilnahme an allen meinen Bestrebungen während meiner Studienzeit verdanke, wesentlich bei meinen Untersuchungen gefördert wurde, und ich ergreife mit Freude die Gelegenheit, meinem hochverehrten Lehrer auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

I. Abschnitt.

Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen.

I. Capitel.

Die linearen ganzzahligen Transformationen der Determinante + 1 und die in ihnen enthaltenen Untergruppen.

§ 1.

Die linearen ganzzahligen Transformationen der Determinante + 1.

Die Transformationen

$$(1) \quad \omega' = \frac{\alpha \omega + \beta}{\gamma \omega + \delta},$$

in denen

$$\alpha \delta - \beta \gamma = 1$$

ist und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgend welche positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, bilden eine Gruppe. Denn die Zusammensetzung irgend zweier solcher Transformationen führt zu einer dritten derselben Art.

Deutet man ω in der complexen Zahlenebene, so bemerkt man sofort, dass alle Werthe ω' , die durch die Transformationen (1) aus einem Werthe ω entstehen, mit diesem im Vorzeichen der zweiten Ordinate übereinstimmen. Wir wollen daher nur die Punkte ω mit *positiver* zweiter Ordinate in Betracht ziehen. Sie erfüllen die „positive“ Halbebene.

Es soll sich nun darum handeln, ein anschauliches geometrisches Bild für die Gesammtheit der Transformationen (1) herzustellen. Dazu führen folgende Ueberlegungen:

I. „Erleidet ein Punkt ω durch die Transformation $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ eine Vergrösserung resp. keine Veränderung seiner Ordinate, so ist

$$(\gamma \omega + \delta) (\gamma \bar{\omega} + \delta) < 1$$

resp.

$$(\gamma \omega + \delta) (\gamma \bar{\omega} + \delta) = 1.$$

Dabei bezeichnet $\bar{\omega}$ die zu ω conjugirt complexe Grösse.

In der That, die Ordinate des Punktes ω ist

$$\frac{\omega - \bar{\omega}}{2i},$$

und die Bedingungen

$$\frac{1}{2i} \left\{ \frac{\alpha \omega + \beta}{\gamma \omega + \delta} - \frac{\alpha \bar{\omega} + \beta}{\gamma \bar{\omega} + \delta} \right\} \geq \frac{\omega - \bar{\omega}}{2i}$$

reduciren sich durch leichte Umformungen auf die im Satze angegebenen.

II. „Bestimmt man alle Punkte, welche den Bedingungen genügen:

$$\omega \bar{\omega} > 1 \quad \text{und} \quad -1 < \omega + \bar{\omega} < +1,$$

so giebt es keine Transformation (1), welche die Ordinate irgend eines dieser Punkte ungeändert liesse oder vergrösserte.“

Denn die Bedingungen

$$1 \geq (\gamma \omega + \delta) (\gamma \bar{\omega} + \delta)$$

lassen, da

$$(\gamma \omega + \delta) (\gamma \bar{\omega} + \delta) > \gamma^2 \pm \gamma \delta + \delta^2$$

ist, keine ganzzahligen Lösungen γ, δ zu.

Wir wollen nun zwei Punkte ω und ω' einander *äquivalent* nennen, wenn sie in der, offenbar gegenseitigen, Beziehung zu einander stehen, dass der eine durch eine Transformation (1) aus dem andern hervorgeht. Dann können wir, da ja die Ordinaten zweier Punkte entweder gleich sind oder die eine grösser als die andere ist, auf Grund von II. sagen:

III. „Im Innern des Raumes, welcher begrenzt wird durch einen um den Nullpunkt mit dem Radius 1 beschriebenen Kreis und durch zwei zur Axe der rein imaginären Zahlen in den Abständen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ parallel laufende Geraden giebt es keine zwei einander äquivalente Punkte.“

Die innerhalb dieses „Ausgangs-Raumes“ liegenden Punkte sind nämlich gerade die durch die Bedingungen des Satzes II. charakterisirten.

In Bezug auf die Begrenzung dieses Raumes haben wir den Zusatz:

IIIa. „Die Punkte der Ränder des Ausgangsraumes sind paarweise vermöge der Transformationen $\omega' = \omega \pm 1, -\frac{1}{\omega}$, einander äquivalent, jedoch nie mit einem Punkte im Innern des Ausgangsraumes.“

Denn entsprechend den durch diese Punkte befriedigten Bedingungen:

$$\omega \bar{\omega} \geq 1, \quad -1 \leq \omega + \bar{\omega} \leq +1$$

giebt es keine Transformation (1), welche ihre Ordinate vergrösserte, und nur die Transformationen $\omega + t$ und $-\frac{1}{\omega} + \tau$, wo t und τ

irgend welche ganze Zahlen sind, können ihre Ordinate ungeändert lassen.

Unterwerfen wir nun die Punkte des so erhaltenen Ausgangsraumes einer beliebigen Transformation (1), so geht derselbe über in einen ebenfalls von drei (auf der Axe der reellen Zahlen senkrecht stehenden) Kreisbogen begrenzten Raum.

Ich behaupte nun:

IV. „Zwei durch verschiedene Transformationen $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ und $\frac{\alpha_1\omega + \beta_1}{\gamma_1\omega + \delta_1}$ aus dem Ausgangsraum entstehende Kreisbogendreiecke D und D_1 können nie einen Flächentheil gemein haben.“

Denn das Dreieck D geht durch die Transformation $\frac{\delta\omega - \beta}{-\gamma\omega + \alpha}$ in den Ausgangsraum über, während zugleich das Dreieck D_1 in ein Dreieck D_2 übergeht.

Hätten nun D und D_1 ein Flächenstück gemeinsam, so müsste Gleiches für D_2 und den Ausgangsraum stattfinden, was nicht angeht, da im Innern des letztern keine zwei äquivalenten Punkte liegen können.

An die drei Begrenzungskanten des Ausgangsraumes legen sich nun die Dreiecke*) $\omega + 1$, $\omega - 1$ und $-\frac{1}{\omega}$ an, woraus folgt, dass an die drei Kanten jedes Dreiecks $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ sich resp.

$$\frac{\alpha(\omega + 1) + \beta}{\gamma(\omega + 1) + \delta}, \quad \frac{\alpha(\omega - 1) + \beta}{\gamma(\omega - 1) + \delta}, \quad \frac{\alpha\left(-\frac{1}{\omega}\right) + \beta}{\gamma\left(-\frac{1}{\omega}\right) + \delta}$$

anlegen.

Mit Rücksicht auf IV. können wir somit den für das Folgende fundamentalen Satz aussprechen:

V. „Die Gesammtheit der durch alle Transformationen (1) aus dem Ausgangsraum entstehenden Dreiecke bedecken die positive Halbebene einfach und durchaus lückenlos.“

Man bemerke, dass die unzählig vielen Dreiecke unserer Figur an den zu $\varrho = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ äquivalenten Stellen zu je sechs zusammenstossen, dem entsprechend, dass der Ausgangsraum an den Ecken ϱ und $1 + \varrho$ Winkel von 60 Grad aufweist.

Die Dreiecke $\omega + \nu$ haben den unendlich fernen Punkt als eine Ecke; dagegen verlaufen alle übrigen Dreiecke $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ im Endlichen,

*) Die in Rede stehenden Dreiecke sind hier, wie häufig im Folgenden, mit den Transformationen bezeichnet, durch welche sie aus dem Ausgangsraum entstehen.

sich mit der Ecke $\frac{\alpha}{\gamma}$ in einem rationalen Punkte auf die Axe der reellen Zahlen stützend.

Jeder solche Punkt $\frac{\alpha}{\gamma}$ ist Ecke für unzählig viele Dreiecke, die sich an einander legen und deren durch $\frac{\alpha}{\gamma}$ laufende Kanten sich sämtlich in diesem Punkte berühren. Die Dreiecke selbst legen sich kleiner und kleiner werdend immer dichter an die Axe der reellen Zahlen an.

§ 2.

Zusammensetzung aller Transformationen $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ aus zweien derselben.

Obgleich durch eine einfache arithmetische Betrachtung nachgewiesen werden kann, dass alle Transformationen (1) sich aus den beiden

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \omega + 1^*) \\ \omega' &= -\frac{1}{\omega} \end{aligned} \right\}$$

zusammensetzen lassen, so wollen wir doch hier einen directen Nachweis dieses Umstandes aus unserer Figur herleiten.

Das sich dabei darbietende Verfahren ist einerseits an und für sich von Interesse, andererseits grosser Verallgemeinerung fähig.

Ich schicke folgenden Hülfsatz voraus:

„Man begrenze in der positiven Halbebene durch zwei zur Axe der rein imaginären Zahlen parallel laufende Geraden einen Parallelstreifen von endlicher Breite und zerlege ihn in zwei Theile, indem man in beliebig kleinem aber endlichem Abstände k eine Parallele zur Axe der reellen Zahlen zieht. Dann liegen in dem unendlich grossen, der Axe der reellen Zahlen abgewandten Theile des Parallelstreifens nur eine endliche Zahl von Punkten, die einem beliebig angenommenen Punkte ω äquivalent sind.“

Ein Punkt wird dann und nur dann in dem bezeichneten Theile des Parallelstreifens liegen, wenn

- 1) seine Ordinate grösser ist als k und
- 2) seine Abscisse zwischen die parallelen Begrenzungslinien des Parallelstreifens fällt.

Soll nun erstens die Ordinate des Punktes $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ grösser als k werden, so ist erforderlich, dass

$$\gamma^2\omega\bar{\omega} + \gamma\delta(\omega + \bar{\omega}) + \delta^2 - \frac{l}{k} < 0$$

*) Mit jeder Transformation betrachten wir auch ihre inverse, also ihre — 1te Potenz, als gegeben.

wird. Hier bezeichnet $\bar{\omega}$ die zu ω conjugirte Grösse und es ist $\frac{\omega - \bar{\omega}}{2i} = l$ gesetzt.

Diese Ungleichung kann aber nur für eine endliche Zahl von Werthepaaren γ, δ erfüllt werden. Es stellt nämlich die Gleichung

$$x^2 \cdot \omega \bar{\omega} + x \cdot y(\omega + \bar{\omega}) + y^2 - \frac{l}{k} = 0,$$

wenn x und y als rechtwinklige Coordinaten gedeutet werden, eine Ellipse dar, und die linke Seite ihrer Gleichung fällt nur für die in ihrem Innern liegenden Punkte negativ aus.

Eine Ellipse kann aber nur eine endliche Zahl von Punkten ganzzahliger Abscisse und Ordinate umschliessen.

Sei nun (Γ, Δ) irgend einer unter diesen Punkten, dessen Abscisse (Γ) und Ordinate (Δ) relativ prime Zahlen sind. Dann werden alle Lösungen der Gleichung

$$\alpha \Delta - \beta \Gamma = 1,$$

gegeben sein durch

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + t \cdot \Gamma \\ \beta &= \beta_0 + t \cdot \Delta \end{aligned} \right\},$$

wo α_0, β_0 irgend ein Lösungspaar bezeichnet und t alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen hat.

Soll nun zweitens die Abscisse des Punktes

$$\frac{\alpha \omega + \beta}{\Gamma \omega + \Delta}$$

zwischen die Begrenzungslinien unseres Parallelstreifens fallen, so muss

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha_0 \omega + \beta_0}{\Gamma \omega + \Delta} + \frac{\alpha_0 \bar{\omega} + \beta_0}{\Gamma \bar{\omega} + \Delta} \right\} + t$$

zwischen zwei gegebenen Grenzen liegen. Offenbar lässt sich aber die ganze Zahl t nur endlich oft dieser Bedingung gemäss wählen.

Somit ist unsere Behauptung vollständig erwiesen.

Man bemerke noch, dass nach Satz I. im § 1. alle Punkte ω , welche durch die Transformation $\frac{\alpha \omega + \beta}{\gamma \omega + \delta}$, $\gamma \geq 0$, eine Vergrösserung ihrer Ordinate erfahren, das Innere des Kreises ausfüllen, der um den Punkt $-\frac{\delta}{\gamma}$ mit dem Radius $\frac{1}{\gamma}$ beschrieben ist. So erleiden also z. B. alle diejenigen Punkte durch die Transformation $-\frac{1}{\omega}$ eine Vergrösserung der Ordinate, welche unterhalb der krummlinigen Kante des Ausgangsraumes liegen.

Und nun ist es leicht die Richtigkeit der folgenden Angaben einzusehen:

Jedem beliebigen Punkte ω_0 der positiven Halbebene entspricht ein (und also nach Satz III., § 1. im Allgemeinen auch nur ein) ihm äquivalenter Punkt des Ausgangsraumes; und zwar findet man diejenige lineare Transformation, welche die Ueberführung des Punktes ω_0 in seinen äquivalenten des Ausgangsraumes leistet, nach folgender Vorschrift:

Man verschiebe vermöge der Transformation $\omega + 1$ (oder ihrer inversen $\omega - 1$) den Punkt ω_0 , bis er zwischen die verticalen Begrenzungslinien des Ausgangsraumes zu liegen kommt.

Entweder ist nun seine Ordinate schon lang genug, so dass er jetzt in dem Ausgangsraume liegt — und dann ist unser Ziel schon erreicht — oder er hat eine zu kurze Ordinate. In letzterem Falle verwandelt die Transformation $-\frac{1}{\omega}$ ihn in einen Punkt mit grösserer Ordinate, der nun, wenn er vermöge $\omega + 1$ wieder zwischen die verticalen Begrenzungslinien verschoben wird, entweder in den Ausgangsraum hineinreicht oder nicht.

Im letzteren Falle wende man wieder die Transformation $-\frac{1}{\omega}$ an, verschiebe wieder, wenn nöthig, und so fort.

Sollte bei Anwendung der genannten Operationen der Punkt ω_0 einmal in einen Punkt der Begrenzungslinien des Ausgangsraumes übergehen, so ist der Process als beendet anzusehen, da wir diese Punkte mit zu dem Ausgangsraume nehmen müssen, um alle Punkte ω in Betracht ziehen zu können.

Nur in diesem Falle gehören nach Satz IIIa., § 1. dem Punkte ω_0 zwei ihm und untereinander äquivalente Punkte des Ausgangsraumes zu.

In allen Fällen muss aber der soeben angegebene Process nach einer endlichen Zahl von Operationen zum gewünschten Ziele führen. Denn nach unserem Hülfsatz giebt es ja überhaupt zwischen den verticalen Rändern des Ausgangsraumes nur eine endliche Anzahl von Punkten, die zu ω_0 äquivalent sind und eine grössere Ordinate besitzen, als sie ω_0 hat.

Die Schilderung dieses Processes gab Herr Klein in seinem Colleg über algebraische Gleichungen, im Anschluss an die Theorie der Reduction quadratischer Formen. (München, im Sommer 1879.)

Es zeigt sich so, dass und wie sich jede Substitution*) $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ aus den beiden $\omega + 1$ und $-\frac{1}{\omega}$ zusammensetzen lässt.

Man wende nämlich einfach auf den Punkt $\frac{\delta\omega_0 - \beta}{-\gamma\omega_0 + \alpha}$ das in Rede stehende Verfahren an; ω_0 kann dabei irgend ein Punkt des Ausgangsraumes sein.

*) „Substitution“ ist gleichbedeutend mit „Transformation“.

§ 3.

Die in der Gesamtheit der linearen ganzzahligen Transformationen der Determinante $+1$ enthaltenen Untergruppen.

Fundamentalphypolygone.

Irgend ein aus der Gesamtheit von linearen ganzzahligen Substitutionen herausgegriffener Complex von Substitutionen, welcher so beschaffen ist, dass die Zusammensetzung irgend zweier (verschiedener oder identischer) Substitutionen des Complexes wieder auf eine Substitution des Complexes führt, heisst eine *Untergruppe* der Gesamtheit der Transformationen, der „*Hauptgruppe*“.

Wir wollen uns hier des bestimmteren Ausdrucks wegen auf Untergruppen mit endlichem Index beschränken.

Unter dem Index einer Untergruppe versteht man bekanntlich die kleinste Zahl μ von Substitutionen $T_1, T_2 \dots T_\mu$ der Hauptgruppe, welche der Anforderung genügen, dass jede Substitution der Hauptgruppe als Product einer Substitution der Untergruppe und einer dieser μ Substitutionen dargestellt werden kann.

In üblicher Weise sind hier die Substitutionen symbolisch durch Buchstaben bezeichnet, wobei die identische Substitution $\omega' = \omega$ das Symbol 1 erhält; das Product zweier Substitutionen ist diejenige, die durch Zusammensetzung der beiden die Factoren bildenden Substitutionen entsteht.

Wir wollen weiterhin Kürze halber sagen, zwei ω -Dreiecke oder auch zwei Punkte ω und ω' seien in Bezug auf eine Untergruppe *relativ äquivalent*, wenn sie aus einander durch eine Transformation der Untergruppe hervorgehen.

Ist nun irgend eine Untergruppe gegeben, so construiren man in folgender Weise ein zu ihr gehöriges „*Fundamentalphypolygon*“:*)

Man gehe von irgend einem der ω -Dreiecke, etwa dem Ausgangsraume aus. An dieses legen sich nach rechts die Dreiecke $\omega + 1$, $\omega + 2$ u. s. w. an. Diese nehmen wir successive in das zu bildende Polygon auf, bis wir an ein solches nicht mehr aufzunehmendes $\omega + a$ kommen, welches mit dem Ausgangsraume relativ äquivalent ist. Die links befindliche geradlinige Kante des Dreiecks ω geht dann durch die zur Untergruppe gehörige Substitution $\omega + a$ in die rechts liegende Kante des Dreiecks $\omega + a - 1$ über. Wir wollen sagen, dass diese Kanten nicht mehr „frei“ sind, sondern sich gegenseitig durch die Untergruppe „binden“.

Von den sich unmittelbar an die noch „freien“ Kanten der nunmehr aufgenommenen Dreiecke $\omega + \nu$ ($\nu = 0, 1, 2 \dots a - 1$) an-

*) Siehe Mathem. Annalen Bd. XVII, pag. 63 u. 64.

setzenden Dreiecken (D) nehmen wir nur so viele auf, dass jedes der nicht aufgenommenen Dreiecke (D) mit einem der jetzt überhaupt aufgenommenen Dreiecke ($\omega + \nu$ und ein Theil der (D)) relativ äquivalent ist, die letzteren jedoch sämmtlich unter einander relativ inäquivalent sind. Die Begrenzungskanten des jetzt gebildeten Aggregats von inäquivalenten Dreiecken werden nun theils sich paarweise durch die Untergruppe „binden“, theils noch „frei“ sein.

Mit den Dreiecken (D'), die sich an diese freien Kanten unmittelbar ansetzen, verfähre man nun genau so, wie soeben mit den Dreiecken (D). Man nehme also so viele von ihnen auf, dass jedes der übrigen nicht aufgenommenen irgend einem der Dreiecke des nunmehr vergrößerten Aggregates relativ äquivalent ist; dass aber alle Dreiecke des letzteren unter einander relativ inäquivalent sind.

So fahre man fort, bis man ein Aggregat von relativ inäquivalenten Dreiecken erhalten hat, von dessen Begrenzungskanten keine mehr frei ist, sondern je zwei sich gegenseitig binden, so dass jedes sich unmittelbar an eine Kante des „*Fundamentalphylons*“ ansetzende Dreieck einem Dreieck des Fundamentalphylons relativ äquivalent ist. Es ist zu bemerken, dass das Fundamentalphylon in der mannigfachsten Weise gewählt werden kann. Denn einmal ist, wie erwähnt, die Wahl des Ausgangsdreiecks vollkommen willkürlich. Andererseits kann die jedesmalige Aufnahme neuer sich an die freien Kanten ansetzenden Dreiecke im Allgemeinen in verschiedenartigster Weise den gestellten Anforderungen entsprechend vorgenommen werden.

Ueber die Eigenschaften und Bedeutung des Fundamentalphylons handeln die nachfolgenden Entwicklungen.

Das Fundamentalphylon besteht aus μ Dreiecken, wo μ den Index der Untergruppe bezeichnet. Es können nicht mehr als μ Dreiecke sein, denn unter je $\mu + 1$ befinden sich mindestens zwei relativ äquivalente. Es sind aber genau μ Dreiecke, wie aus dem nunmehr zu beweisenden wichtigen Satze folgt:

„Jedes Dreieck $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ ist einem (und nur einem) Dreiecke des Fundamentalphylons relativ äquivalent, und zwar kann es in dasselbe durch successive Anwendung derjenigen Substitutionen E der Gruppe transformirt werden, welche die sich bindenden Kanten des Fundamentalphylons in einander überführen.“

Die Substitutionen E bilden demnach ein volles System von erzeugenden Substitutionen der Untergruppe, indem jede beliebige Substitution der Untergruppe sich als ein Product der Substitutionen E darstellen lässt.

Dies beweist man nach Herrn Klein folgendermassen:

Seien A_1 und A_1' , A_2 und A_2' ... A_i und A_i' ... je zwei sich bindende

Kanten des Fundamentalpolygons. E_i bezeichne die Transformation der Untergruppe, durch welche die Kante A_i in A_i' übergeht.

Wendet man nun auf das Fundamentalpolygon die Transformation E_i an, so geht dasselbe in ein neues Polygon über, welches sich längs der Kante A_i' an das alte anlegt.

So legt sich vermöge der Transformationen E_i und E_i^{-1} um das Fundamentalpolygon ein Kranz neuer Polygone, je eines an je eine Kante des Fundamentalpolygons.

Durch fortgesetzte Anwendung der Transformationen E_i entstehen aus diesen Polygonen andere und andere. Und nun ist die Behauptung unseres Satzes, dass alle so aus dem Fundamentalpolygone entstehenden neuen Polygone die *ganze* positive Halbebene *lückenlos* überdecken.

Dieses wird aber bewiesen sein, wenn wir zeigen, dass an jede Kante eines bereits erhaltenen Polygons sich vermöge der Transformationen E_i ein neues anlegt.

Sei $T = E_m^{\mu_m} E_n^{\mu_n} E_p^{\mu_p} \dots$ die Transformation, durch welche ein Polygon aus dem Fundamentalpolygon entstanden ist, und sei $\overline{A_i}$ eine Kante des Polygons. So wird $\overline{A_i}$ durch T aus A_i entstehen.

Dann ist aber TE_i^{-1} eine Transformation, vermöge welcher aus dem Fundamentalpolygon ein sich an $\overline{A_i}$ anlegendes neues Polygon entsteht. Denn vermöge E_i^{-1} geht A_i' in A_i und vermöge T geht A_i in $\overline{A_i}$ über.

Man bemerke, dass alle in der geschilderten Weise aus dem Fundamentalpolygon entstehenden Polygone die positive Halbebene nicht nur lückenlos, sondern auch *einfach* überdecken. Denn, wie leicht zu sehen, können zwei solche Polygone kein Dreieck gemeinsam haben, ohne ganz zu coincidiren.

Auf Grund des Satzes pag. 12 kann man nun offenbar a priori angeben, durch welches Product der erzeugenden Transformationen E sich irgend ein ω -Dreieck in das ihm relativ äquivalente, oder, was auf dasselbe hinauskommt, irgend ein Punkt ω_0 in den ihm relativ äquivalenten des Fundamentalpolygons überführen lässt, sofern man für jeden nicht im Fundamentalpolygon liegenden Punkt zwischen den verticalen Begrenzungslinien des Fundamentalpolygons eine aus den erzeugenden Substitutionen E zusammengesetzte Substitution kennt, die seine Ordinate vergrößert.

Ich will aber hier nicht untersuchen, ob solche Transformationen, die die Ordinate der betreffenden Punkte vergrößern, für jedes beliebige Fundamentalpolygon a priori angegeben werden können. — Es sei nur bemerkt, dass für die grösste Zahl der bisher überhaupt behandelten Untergruppen solche Substitutionen in der That bekannt sind, und ver-

möge derselben die Ueberführung eines beliebigen Punktes ω_0 in den ihm relativ äquivalenten des Fundamentalpolygons durch folgenden, dem auf pag. 15 geschilderten ganz analogen Process bewerkstelligt wird:

Man verschiebe den Punkt vermöge der die verticalen Ränder des Fundamentalpolygons vereinigenden Substitution so lange, bis er zwischen diese Ränder fällt. Ist dann seine Ordinate zu kurz, so dass er noch nicht im Fundamentalpolygon (oder auf einer Kante desselben) liegt, so wende man auf ihn diejenige Substitution an, welche die gerade über ihm liegende Kante des Fundamentalpolygons in die ihr zugehörige (sie „bindende“) Kante überführt. Dadurch wird die Ordinate des Punktes vergrössert. Fällt nun der so transformirte Punkt nicht ohnedies in den von den verticalen Rändern des Fundamentalpolygons begrenzten Parallelstreifen, so führe man diese Lage abermals vermöge der die verticalen Ränder vereinigenden Substitution herbei.

Ist jetzt seine Ordinate noch nicht lang genug, um in das Fundamentalpolygon zu reichen, so wende man wieder diejenige Transformation an, welche die gerade über ihm liegende Kante des Fundamentalpolygons in die zugehörige transformirt, verschiebe wieder, wenn nöthig, und so fort.

Dieser Process schliesst nach einer endlichen Zahl von Operationen, so dass der Punkt schliesslich, wie gewünscht, in das Fundamentalpolygon transformirt ist.

§ 4.

Fortsetzung. Congruenzgruppen.

Von allen Untergruppen beherrscht man bislang ihrer arithmetischen Natur nach nur eine bestimmte Classe, nämlich die sogleich zu definirenden Congruenzgruppen. In Rücksicht auf die im zweiten Abschnitt zu gebenden Entwicklungen seien diesen Gruppen die nachfolgenden Betrachtungen gewidmet.

Nennt man zwei Substitutionen

$$\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha_1\omega + \beta_1}{\gamma_1\omega + \delta_1}$$

(mod. n) congruent, wenn

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta \equiv \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : \delta_1 \pmod{n},$$

so giebt es bekanntlich

$$G = \frac{n^3}{k} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) \dots$$

mod. n incongruente Substitutionen, wo $p, q \dots$ die verschiedenen in n aufgehenden Primzahlen sind, und k die Zahl der Lösungen der Congruenz

$$x^2 \equiv 1 \pmod{n}$$

bedeutet.

Solche Untergruppen nun, die alle diejenigen und nur diejenigen Substitutionen enthalten, die zu gegebenen Substitutionen in Bezug auf einen festen Modul (n) congruent sind, nennt man nach Herrn Klein „Congruenzgruppen“ und zwar der n^{ten} Stufe.

Hier wirft sich als fundamental die Frage auf:

Wie kann man entscheiden, ob eine gegebene Gruppe Congruenzgruppe ist oder nicht?

Für die Beantwortung dieser Frage bieten sich zwei Wege dar. Erstens:

Eine Gruppe wird dann und nur dann Congruenzgruppe von der n^{ten} Stufe sein, wenn alle zu der Substitution $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, der „Identität“, (mod. n) congruenten Substitutionen zu der Gruppe gehören.

Zunächst ist selbstverständlich, dass eine Gruppe n^{ter} Stufe alle Substitutionen in sich enthält, die (mod. n) zur Identität congruent sind. Aber auch umgekehrt: Enthält eine Gruppe alle (mod. n) zur Identität congruenten Substitutionen, so werden, falls T irgend eine Substitution der Gruppe ist, alle zu T (mod. n) congruenten Substitutionen gleichfalls zur Gruppe gehören, da diese von der Form ST sind, wo S (mod. n) zur Identität congruent ist.

Sucht man daher unter einem vollen System von (mod. n) verschiedenen Substitutionen alle diejenigen $T_1, T_2 \dots T_r$ heraus, welche zu unserer Gruppe gehören, so lässt sich diese definiren als die Gesamtheit derjenigen Substitutionen, welche (mod. n) zu den Substitutionen T_i congruent sind.

Die auf diesen Satz sich stützende Methode zur Untersuchung, ob eine vorgelegte Untergruppe Congruenzgruppe ist oder nicht, verlangt eine endliche Zahl von Versuchen. Man hat sich nämlich die erzeugenden Substitutionen der Gruppe $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{n}$ zu verschaffen, und diese darauf hin zu untersuchen, ob sie zu der vorgelegten Gruppe gehören, oder ob dies nicht (wenigstens nicht für alle) der Fall ist.

Geometrisch lässt sich dies nach den Entwicklungen des vorhergehenden Paragraphen so ausdrücken:

Man hat zu untersuchen, ob das Fundamentalpolygon der vorgelegten Gruppe vermöge der seine zusammengehörigen Ränder vereinigenden Substitutionen so oft an einander gelegt werden kann, dass das Fundamentalpolygon für die Gruppe $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{n}$ hervorgeht. —

Eine zweite Methode der Untersuchung ist gelegentlich von Herrn Klein benützt. Sie gründet sich auf folgenden Satz:

Ergeben die erzeugenden Substitutionen einer Gruppe vom Index μ , (mod. n) betrachtet, durch Zusammensetzung nur $\frac{G}{\mu} \pmod{n}$ ver-

schiedene Substitutionen, so besteht die Gruppe aus allen Substitutionen, die (mod. n) jenen $\frac{G}{\mu}$ Substitutionen congruent sind. G bezeichnet dabei die Zahl der (mod. n) verschiedenen (incongruenten) Substitutionen.

Man kann diesen Satz kurz so beweisen:

Nach Voraussetzung erweisen sich alle Substitutionen der Gruppe mit $\frac{G}{\mu} = \nu$ Substitutionen, etwa:

$$S_1, S_2 \dots S_\nu \pmod{n}$$

congruent. Es handelt sich darum nachzuweisen, dass auch umgekehrt jede mit einer $S_i \pmod{n}$ congruente Substitution zur Untergruppe gehört.

Nun werden alle (mod. n) verschiedenen Substitutionen dargestellt sein durch folgendes Schema:

$$\left. \begin{array}{cccc} S_1, & S_2 & \dots & S_\nu \\ T_2 S_1, & T_2 S_2 & \dots & T_2 S_\nu \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ T_\mu S_1, & T_\mu S_2 & \dots & T_\mu S_\nu \end{array} \right\}$$

und die μ Substitutionen

$$1, T_2, T_3 \dots T_\mu$$

werden unter einander relativ inäquivalent sein, so dass jede beliebige Substitution dargestellt werden kann in der Form ST_k , wo S eine Substitution der Untergruppe ist.

Soll nun

$$ST_k \equiv S_i \pmod{n}$$

sein, so folgt

$$T_k \equiv S_j \pmod{n},$$

was nur angeht, wenn $T_k = S_j = 1$ ist, so dass sich also ST_k auf S , eine Substitution der Untergruppe, reducirt, was zu beweisen war.

§ 5.

Die homogenen linearen ganzzahligen Transformationen der Determinante $+1$.

Alle Erörterungen über die Gruppe der ganzzahligen Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

lassen sich mit Leichtigkeit auch für die homogenen ganzzahligen Substitutionen

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{array} \right\} \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

verwerthen.

Es findet nämlich, um die von C. Jordan eingeführte Aus-

druckweise zu gebrauchen, ein *hemiedrischer Isomorphismus* zwischen beiden Substitutionsgruppen statt.

Einer Substitution

$$\left. \begin{aligned} \omega_1' &= \alpha \omega_1 + \beta \omega_2 \\ \omega_2' &= \gamma \omega_1 + \delta \omega_2 \end{aligned} \right\}$$

der homogenen Gruppe ist die *eine*

$$\omega' = \frac{\alpha \omega + \beta}{\gamma \omega + \delta}$$

der nicht homogenen entsprechend zu setzen, während der nicht homogenen Substitution

$$\omega' = \frac{\alpha \omega + \beta}{\gamma \omega + \delta}$$

die *beiden* homogenen

$$\left. \begin{aligned} \omega_1' &= \alpha \omega_1 + \beta \omega_2 \\ \omega_2' &= \gamma \omega_1 + \delta \omega_2 \end{aligned} \right\}$$

und

$$\left. \begin{aligned} \omega_1' &= -\alpha \omega_1 - \beta \omega_2 \\ \omega_2' &= -\gamma \omega_1 - \delta \omega_2 \end{aligned} \right\}$$

correspondiren. Vermöge dieser Correspondenz entspricht auch jeder Untergruppe der homogenen Substitutionen eine solche der nicht homogenen.

Hierbei ist zu bemerken, dass der Isomorphismus zwischen solchen *Untergruppen* sehr wohl ein *holoëdrischer* sein kann. Offenbar tritt dieser Umstand dann ein, wenn zwei zusammengehörige homogene Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}$$

nie gleichzeitig der homogenen Untergruppe angehören können.

Vermöge dieses Isomorphismus ist man in der Lage alle Eigenschaften der homogenen Gruppe und Untergruppen von den entsprechenden der nicht homogenen abzulesen.

So ist es namentlich leicht die Entwicklungen des vorhergehenden Paragraphen auf die homogenen Transformationen zu übertragen. Man bemerkt, dass fast alle dort ausgesprochenen Sätze wörtlich ihre Geltung auch für homogene Substitutionen behalten.

Es ist nur zu beachten, dass zwei *homogene* Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

dann und nur dann mod. n congruent zu nennen sind, wenn

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\equiv \alpha_1 \\ \beta &\equiv \beta_1 \\ \gamma &\equiv \gamma_1 \\ \delta &\equiv \delta_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{mod. } n)$$

und dass, dementsprechend,

$$n^3 \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) \dots$$

(mod. n) verschiedene (incongruente) homogene Substitutionen existiren.

Die an sich selbstverständlichen Bemerkungen dieses Paragraphen sind es, welche gewisse Schwierigkeiten beseitigten, die sich der directen Untersuchung der im zweiten Abschnitt behandelten Multiplcatorgleichungen entgegenstellten. Es handelte sich darum, eine gewisse Gruppe von homogenen Substitutionen arithmetisch zu charakterisiren. Indem die Untersuchung homogener Gruppen nunmehr auf die nicht homogener zurückgeführt ist, lassen sich die für die letzteren ausgebildeten geometrischen Methoden ohne Weiteres für die ersteren verwerthen. (Siehe Abschn. II, §§ 1—3.)

II. Capitel.

Die Bildung der Modulfunctionen und Modulformen 1. Stufe.

§ 1.

Definition der Modulfunctionen und Modulformen.

Wir wollen im Folgenden immer unter linearer Transformation schlechthin eine ganzzahlige der Determinante ± 1 verstehen.

Wir bringen nun die linearen Transformationen durch folgende Definitionen mit functionentheoretischen Untersuchungen in Zusammenhang:

Eine Modulfunction ist eine eindeutige analytische) Function eines Argumentes ω , die ungeändert bleibt, wenn man das Argument irgend welchen linearen Transformationen einer in der Gesamtheit der letzteren enthaltenen Untergruppe unterwirft, während sie bei Anwendung aller übrigen linearen Transformationen ihren Werth im Allgemeinen ändert.*

Eine Modulform k^{ter} Dimension ist eine eindeutige homogene analytische Function k^{ter} Dimension zweier Argumente ω_1, ω_2 , die ungeändert bleibt, wenn man die Argumente irgend welchen homogenen linearen Transformationen einer in der Gesamtheit der letzteren enthaltenen Untergruppe unterwirft, während sie bei Anwendung irgend einer der übrigen linearen Transformationen ihren Werth im Allgemeinen ändert.

Der Quotient irgend zweier Modulformen von ω_1, ω_2 gleicher Dimension ist eine Modulfunction von $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$, und jede Modulfunc-

*) Wir nennen nach Weierstrass eine Function (complexer Veränderlicher) „analytisch“, wenn sie sich durch ein System untereinander zusammenhängender, d. h. in einander fortsetzbarer, Potenzreihen definiren lässt.

tion lässt sich auf unendlich viele Weisen als Quotient zweier Modulformen darstellen.

Wir können uns daher auf die Bildung der Modulformen beschränken. Dabei sind es namentlich Eisenstein'sche Ideen, die uns zu den gewünschten Formeln leiten werden.

§ 2.

Bildung der Modulformen 1. Stufe.

Wir ziehen zunächst nur diejenigen Modul-Formen und -Functionen in Betracht, welche bei *allen überhaupt möglichen* linearen Transformationen ungeändert bleiben. Diese werden wir gemäss den Auseinandersetzungen des ersten Capitels § 4. Modul-Formen resp. -Functionen der *ersten Stufe* nennen.

Unter Modul-Form oder -Function schlechthin sei im Folgenden immer eine solche *erster Stufe* verstanden.

Ist nun

$$\varphi(\omega_1, \omega_2)$$

eine homogene Function k^{ter} Dimension von ω_1 und ω_2 , so kann offenbar

$$\sum \varphi(\lambda \omega_1 + \mu \omega_2, \nu \omega_1 + \varrho \omega_2)^*)$$

eine Modulform k^{ter} Dimension darstellen, sofern die Summe für ein Gebiet der Variabeln ω_1, ω_2 einen von der Anordnung der Summanden unabhängigen Werth hat, innerhalb dieses Gebietes eine eindeutige Function von ω_1, ω_2 ist und über solche Werthsysteme $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ erstreckt wird, dass die Grössenpaare

$$\lambda \omega_1 + \mu \omega_2, \nu \omega_1 + \varrho \omega_2$$

des in Rede stehenden Gebietes sich in ihrer Gesamtheit reproduciren, wenn ω_1 und ω_2 irgend einer linearen Transformation unterworfen werden.

Für unsere Zwecke genügt es, wie der Erfolg unserer Untersuchungen zeigen wird, für die Function $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ die Potenz $\left(\frac{1}{\omega_1}\right)^m$ zu wählen. Dabei bedeutet m eine ganze positive Zahl.

Dem obigen allgemeinen Ansatz entsprechend bilden wir hier die Summe

*) Eine solche Summe kann, wie Weierstrass in den Berliner Monatsberichten (August, 1880) bemerkt hat, mehrere analytische Functionen in sich vereinigen. Das heisst, die verschiedenen Potenzreihen, in welche sich die Summe entwickeln lässt, können in mehrere Systeme zerfallen, so dass die Potenzreihen eines solchen Systems unter einander zusammenhängen, während je zwei Potenzreihen, die verschiedenen Systemen angehören, nicht aus einander durch Fortsetzung entstehen können. Die Summe stellt dann so viele verschiedene analytische Functionen vor, als getrennte Systeme von Potenzreihen aus ihr erhalten werden.

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu \omega_1 + \nu \omega_2} \right)^m$$

wo das Komma den Ausschluss der Combination

$$\mu = \nu = 0$$

bedeuten soll.

Wie sich leicht nachweisen lässt*), convergirt diese Summe für beliebige Werthe von ω_1, ω_2 , deren Verhältniss $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ keine reelle Zahl ist, unbedingt, sobald $m > 2$ ist. Sie stellt daher dann eine Modulform — m^{ter} Dimension vor, oder wird uns vielmehr zu einer solchen hinführen, indem wir nur eine der beiden analytischen Functionen in Betracht ziehen werden, die sie in sich vereinigt. (Vgl. die Anmerkung auf voriger Seite und § 3.)

Für ungerade $m > 2$ ist sie identisch Null. Wir betrachten daher für $m > 2$ nur die Functionen

$$G_n = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu \omega_1 + \nu \omega_2} \right)^{2n}, \quad n > 1.$$

Neben diesen wollen wir jedoch auch die den Werthen $m=1$ und $m=2$ entsprechenden Summen

$$G_{\frac{1}{2}} = \sum \sum' \left(\frac{1}{\mu \omega_1 + \nu \omega_2} \right),$$

$$G_1 = \sum \sum' \left(\frac{1}{\mu \omega_1 + \nu \omega_2} \right)^2$$

berücksichtigen. Diese convergiren nicht unabhängig von der Reihenfolge der Summation, weshalb diese Reihenfolge in jedem speciellen Falle genau anzugeben ist.

§ 3.

Umsetzung der Functionen G_n in Potenzreihen.

Um die Summen G_n auf ihren Charakter als analytische Functionen zu untersuchen, sowie aus Gründen der Anwendbarkeit, ist es wesentlich, dieselben in Potenzreihen umzusetzen.

Dabei gehen wir von der bekannten Partialbruchzerlegung der Cotangente aus:

$$\pi \cdot \cot a\pi = \frac{1}{a} + \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{a+v} + \frac{1}{a-v} \right\}.$$

Entwickelt man andererseits die Cotangente nach steigenden Potenzen von

$$v = e^{2ai\pi},$$

so erhält man die Grundformel:

*) S. z. B. Eisenstein, Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind. (Mathem. Abhandlungen p. 213 oder auch Crelle's Journal Bd. 35, 1847.)

$$\frac{1}{a} + \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{a+v} + \frac{1}{a-v} \right\} = -i\pi - 2i\pi \sum_{k=1}^{\infty} v^k.$$

Differenzirt man diese Formel m Mal nach a , so folgt:

$$\sum_{v=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a+v} \right)^m = (-1)^m \cdot \frac{(2i\pi)^m}{(m-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} k^{m-1} v^k. *)$$

Die Summe linker Hand convergirt für endliche Werthe a unbedingt, wenn $m > 1$ ist, während der Convergencebereich der Potenzreihe rechter Hand durch die Bedingung $|v| < 1$ bestimmt ist ($|v|$ bedeutet den absoluten Betrag von v).

Diese letztere Bedingung ist gleichbedeutend mit der andern, dass a eine positive zweite Ordinate haben muss, was jetzt ausdrücklich angenommen sei.

Setzen wir nun für a , $\mu \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2} = \mu \cdot \omega$ und summiren über alle ganzzahligen Werthe $\mu = 1$ bis ∞ , so folgt:

$$\sum_{\mu=1}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu\omega + v} \right)^m = (-1)^m \cdot \frac{(2i\pi)^m}{(m-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} k^{m-1} \cdot \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}},$$

wobei

$$e^{i\pi\omega} = q$$

gesetzt ist, und ω , der obigen Bedingung für a entsprechend, eine positive zweite Ordinate hat.

Und aus dieser Formel ergibt sich nun unmittelbar, dass

$$G_n(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{1}{\omega_2} \right)^{2n} \left[\sum_{v=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{v} \right)^{2n} + 2 \cdot (-1)^n \cdot \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n-1)!} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-1} \cdot \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}} \right]$$

oder

$$G_n(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2} \right)^{2n} \cdot \frac{1}{(2n)!} \left[B_n + (-1)^n \cdot 4n \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-1} \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}} \right]$$

ist, wo B_n die n^{te} Bernoulli'sche Zahl bedeutet.

Diese Potenzreihe, welche, wie aus der obigen Entwicklung hervorgeht, mit der $\sum \sum' \left(\frac{1}{\mu\omega_1 + v\omega_2} \right)^{2n}$ übereinstimmt, sobald $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ eine positive zweite Ordinate hat, stellt nun für $n > 1$ eine Modulform der $-2n^{\text{ten}}$ Dimension vor, die wir fortan ebenfalls durch G_n bezeichnen wollen.

Sie ist eine Modulform, denn erstens bleibt sie für alle linearen Transformationen ungeändert, und zweitens ist sie eine eindeutige analytische Function von ω_1 und ω_2 , da die Potenzreihe nach q in der positiven

*) Die Schlussformel in Scheibners Gratulationsschrift: Ueber „unendl. Reihen und deren Convergenz“ (Leipzig 1860), enthält diese Formel als speciellen Fall. — Aus der Scheibner'schen Formel fließen übrigens für die Theorie der Modulfunctionen bemerkenswerthe Resultate, auf die bei geeigneter Gelegenheit zurückzukommen ich mir vorbehalte.

Halbebene ω überall convergirt, aber über dieselbe hinaus keine Fortsetzung gestattet, indem sie für jeden rationalen Werth von ω mit der unendlichen Summe einen unendlich grossen Werth annimmt. *)

Insbesondere kommt nun für $n = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} 3 G_1 &= \left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 \left[1 - 24 \sum k \cdot \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}} \right], \\ g_2 = 60 G_2 &= \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left[\frac{1}{12} + 20 \sum k^3 \cdot \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}} \right]^{**), \\ g_3 = 140 G_3 &= \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \left[\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum k^5 \cdot \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}} \right]^{**), \\ 7! G_4 &= \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^8 \left[\frac{1}{16 \cdot 15} + 2 \sum k^7 \cdot \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}} \right]. \end{aligned}$$

In Bezug auf G_1 ist zu bemerken, dass die Potenzreihe aus der Summe für G_1 durch folgende Anordnung der Summation erhalten ist: Es ist bei festem μ zuerst über alle ν summirt, wobei die Reihenfolge der Summanden ohne Einfluss auf das Resultat ist. In der so gewonnenen Summe ist dann über $\mu = -\infty$ bis $+\infty$ summirt, wobei wiederum die Anordnung der Summation nicht in Betracht kommt.

Die Summe $G_{\frac{1}{2}}$ erfordert eine Behandlung für sich. Wir wollen dieselbe bei folgender Anordnung der Summation auswerthen:

$$G_{\frac{1}{2}}^{(n,m)} = \lim_{\lambda=\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\mu=+\lambda} \left\{ \lim_{z=\infty} \sum_{\nu=-z}^{\nu=+z} \left(\frac{1}{(\mu+n)\omega_1 + (\nu+m)\omega_2} \right) \right\}$$

wo m und n beliebig gewählte ganze Zahlen sind.

Nach der Formel für die Partialbruchzerlegung der Cotangente ist:

$$\begin{aligned} G_{\frac{1}{2}}^{(n,m)} &= \frac{\pi}{\omega_2} \cdot \lim_{\lambda=\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\mu=+\lambda} \cot \{((\mu+n)\omega + m) \cdot \pi\} \\ &= \frac{\pi}{\omega_2} \cdot \lim_{\lambda=\infty} \sum_{\mu=\lambda-n+1}^{\mu=\lambda+n} \cot (\mu \omega \pi) \\ &= \frac{i\pi}{\omega_2} \cdot \lim_{\lambda=\infty} \sum_{\mu=\lambda-n+1}^{\mu=\lambda+n} \frac{e^{2\mu i \pi \omega} + 1}{e^{2\mu i \pi \omega} - 1} \\ &= \frac{i\pi}{\omega_2} \cdot \lim_{\lambda=\infty} \sum_{n'=-n+1}^{n'=n} \frac{e^{2\lambda i \pi \omega} \cdot e^{2n' i \pi \omega} + 1}{e^{2\lambda i \pi \omega} \cdot e^{2n' i \pi \omega} - 1}, \end{aligned}$$

also

$$G_{\frac{1}{2}}^{(n,m)} = - \frac{2n i \pi}{\omega_2}.$$

*) Siehe die schon citirten Entwicklungen von Weierstrass in den Berliner Monatsberichten.

**) g_2 und g_3 sind die von Weierstrass so benannten Invarianten des elliptischen Integrals I. Gattung. — Die Grössen $(2n-1) G_n$ ($n > 1$) treten in Weier-

§ 4.

Verhalten der Function G_1 *) bei linearen Transformationen von ω_1 und ω_2 . Einführung der Function Δ .

Während die Functionen G_n für $n > 1$, wegen der unbedingten Convergenz der zugehörigen Doppelsummen, bei allen linearen Transformationen von ω_1, ω_2 ungeändert bleiben, bedarf der Effect dieser Transformationen in Bezug auf G_1 eingehender Untersuchung.

Nach den Entwicklungen des I. Capitels setzen sich nun alle homogenen linearen Transformationen aus folgenden beiden zusammen:

$$(1) \quad \begin{cases} \omega_1' = \omega_1 + \omega_2 \\ \omega_2' = \omega_2 \end{cases}$$

und

$$(2) \quad \begin{cases} \omega_1' = -\omega_2 \\ \omega_2' = \omega_1. \end{cases}$$

Aus der Gleichung

$$G_1 = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu \omega_1 + \nu \omega_2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{3 \omega_2^2} \left\{ 1 - 24 \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}} \right\},$$

wo zuerst die Summation nach ν , dann diejenige nach μ auszuführen ist, geht hervor, dass für die Transformation (1) G_1 ungeändert bleibt.

Um nun zu untersuchen, welchen Einfluss die Transformation (2) auf G_1 hat, benutzen wir folgende Identität:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^3} \cdot \frac{1}{q^3} - \frac{1}{(p+q)^3} \left\{ \frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} \right\} &= \frac{1}{(p+q)^4} \left\{ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right\} \\ &+ \frac{6}{(p+q)^5} \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right\}, \end{aligned}$$

die sich aus der evidenten Gleichung:

$$\frac{1}{p \cdot q} = \frac{1}{p+q} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p+q} \cdot \frac{1}{q}$$

durch dreimalige Differentiation nach p und dreimalige Differentiation nach q ergibt. **)

Wir wollen in dieser Identität

$$\begin{aligned} p &= \mu_1 \omega_1 + \nu_1 \omega_2, \\ q &= -\mu_2 \omega_1 - \nu_2 \omega_2, \end{aligned}$$

strass' Vorlesungen über elliptische Functionen als die Entwicklungscoefficienten von pu auf und zwar definiert Weierstrass die Grössen durch dieselben unendlichen Doppelsummen, welche den Ausgangspunkt unserer Betrachtung bilden.

*) $G_1 \cdot \omega_2$ ist abgesehen von einem Zahlenfactor die in Weierstrass' Vorlesungen über elliptische Functionen mit 2η bezeichnete Grösse (Periode des Integrals 2. Gattung).

**) Wegen dieser zuerst von Eisenstein l. c. verwandten Identität vgl. § 8. — Die Benützung derselben zur Untersuchung von G_1 ist jedoch neu.

also

$$p + q = (\mu_1 - \mu_2) \omega_1 + (\nu_1 - \nu_2) \omega_2$$

setzen. Alsdann wollen wir alle Gleichungen summiren, welche entstehen, wenn $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2$, jedes unabhängig von den andern, alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. Dabei sollen jedoch die Combinationen, in denen $\mu_1 = \nu_1 = 0$, oder $\mu_2 = \nu_2 = 0$, oder endlich $\mu_1 - \mu_2 = \nu_1 - \nu_2 = 0$ ist, ausgeschlossen bleiben.

Da nun die linke Seite der Identität bei der Summation eine unbedingt convergirende Summe liefert, so wird dieses auch die rechte Seite thun. Man wird daher ein richtiges Resultat erhalten, wenn man über die *einzelnen* Glieder der rechten Seite so summirt, dass bei allen Gliedern *dieselbe* Reihenfolge in der Summation eingehalten wird.

Die Summation über die linke Seite der Identität liefert nun bei ganz willkürlicher Wahl der Anordnung die Function $3 \cdot G_3$.

Setzen wir rechter Hand

$$p + q = w = (\mu_1 - \mu_2) \omega_1 + (\nu_1 - \nu_2) \omega_2 = m \omega_1 + n \omega_2,$$

also
$$p = w - q = (m + \mu_2) \omega_1 + (n + \nu_2) \omega_2,$$

so werden alle zulässigen Combinationen $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2$ erhalten werden, wenn m und n alle ganzen Zahlen von $-\infty \dots +\infty$ mit Ausnahme der Combination $m = n = 0$ durchlaufen, und für jeden stehenden Werth von

$$w = m \omega_1 + n \omega_2$$

μ_2 und ν_2 alle ganzzahligen Werthepaare annehmen mit Ausschluss der Combinationen

$$\left. \begin{array}{l} \mu_2 = 0 \\ \nu_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ und } \left. \begin{array}{l} \mu_2 = -m \\ \nu_2 = -n \end{array} \right\}.$$

Wir können somit schreiben:

$$\begin{aligned} 3G_3 = & 3 \cdot \sum_w \frac{1}{w^4} \left[\sum \sum \frac{1}{(m + \mu_2) \omega_1 + (n + \nu_2) \omega_2} \right. \\ & \left. + \sum \sum \left(\frac{1}{(\mu_2 \omega_1 + \nu_2 \omega_2)^2} \right) - \frac{2}{w^2} \right] \\ & + 6 \sum_w \frac{1}{w^5} \left[\lim_{\substack{k=\infty \\ l=\infty}} \sum_{\mu_2=-l}^{+l} \sum_{\nu_2=-k}^{+k} \frac{1}{(m + \mu_2) \omega_1 + (n + \nu_2) \omega_2} \right. \\ & \left. - \lim_{\substack{k=\infty \\ l=\infty}} \sum_{\mu_2=-l}^{+l} \sum_{\nu_2=-k}^{+k} \left(\frac{1}{(\mu_2 \omega_1 + \nu_2 \omega_2)^2} \right) - \frac{2}{w} \right]. \end{aligned}$$

Also, indem wir zunächst die Summation nach μ_2 und ν_2 ausführen:

$$3G_3 = 6G_1(\omega_1, \omega_2) \cdot \sum_w \frac{1}{w^4} - 18 \sum_w \frac{1}{w^6} - \frac{12i\pi}{\omega_2} \sum_w \frac{m}{w^3}.$$

Und schliesslich durch Summation über w :

$$21 G_3 = 6 G_1(\omega_1, \omega_2) \cdot G_2 + \frac{3i\pi}{\omega_2} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial \omega_1}.$$

Da diese Gleichung eine blosser *Identität* zwischen ω_1 und ω_2 ist, so ist es gestattet, in derselben ω_2 durch ω_1 und ω_1 durch $-\omega_2$ zu ersetzen. Dann folgt, da G_3 und G_2 dabei unverändert bleiben:

$$21 G_3 = 6 G_1(-\omega_2, \omega_1) \cdot G_2 - \frac{3i\pi}{\omega_1} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial \omega_2}.$$

Durch Subtraction der letzten beiden Gleichungen ergibt sich:

$$6 G_2 [G_1(\omega_1, \omega_2) - G_1(-\omega_2, \omega_1)] = -\frac{3i\pi}{\omega_1 \omega_2} \left[\omega_1 \frac{\partial G_2}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial G_2}{\partial \omega_2} \right].$$

Nun ist aber $G_2(\omega_1, \omega_2)$ eine homogene Function vierter Dimension; also nach dem Euler'schen Satze:

$$\omega_1 \frac{\partial G_2}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial G_2}{\partial \omega_2} = -4 G_2.$$

So erhalten wir schliesslich die von anderer Seite wohlbekannte Formel:

$$G_1(\omega_1, \omega_2) - G_1(-\omega_2, \omega_1) = \frac{2i\pi}{\omega_1 \cdot \omega_2}.$$

Diese Gleichung giebt nun offenbar die Aenderung von $G_1(\omega_1, \omega_2)$ an, wenn man auf die Argumente die Substitution

$$\left. \begin{aligned} \omega_1' &= -\omega_2 \\ \omega_2' &= \omega_1 \end{aligned} \right\}$$

anwendet. Dieselbe lässt sich vermöge der Reihenentwicklung von G_1 folgendermassen umsetzen:

$$(A) \log q \left\{ 1 - 24 \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}} \right\} + \log q' \left\{ 1 - 24 \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{q'^{2k}}{1 - q'^{2k}} \right\} = -6,$$

wobei

$$\begin{aligned} q &= e^{i\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}}, \\ q' &= e^{-i\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}}, \end{aligned}$$

also

$$\log q \cdot \log q' = \pi^2$$

ist.

Durch Differentiation folgt aus dieser letzten Gleichung:

$$\frac{dq}{q \cdot \log q} = -\frac{dq'}{q' \cdot \log q'}.$$

Die mit $\frac{d \cdot \log q}{\log q}$ multiplicirte Gleichung (A) lässt sich daher so schreiben:

$$\frac{dq}{q} \left\{ 1 - 24 \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}} \right\} - \frac{dq'}{q'} \left\{ 1 - 24 \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{q'^{2k}}{1 - q'^{2k}} \right\} = -6 \cdot \frac{d \log q}{\log q}.$$

Diese Gleichung lässt sich nun Glied für Glied integrieren, und es ergibt sich nach ausgeführter Integration durch den Uebergang von den Logarithmen zu den Zahlen:

$$(\log q)^6 \cdot q \cdot \prod (1 - q^{2k})^{12} = C \cdot q' \cdot \prod (1 - q'^{2k})^{12}$$

oder:

$$(B) \quad \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \cdot q \cdot \prod (1 - q^{2k})^{12} = - \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^6 \cdot q' \cdot \prod (1 - q'^{2k})^{12},$$

indem sich die Integrationsconstante C aus der Bemerkung ergibt, dass für $\frac{\omega_1}{\omega_2} = i$

$$q = q'$$

wird.

Indem wir nun in (B) beiderseits quadrieren, ergibt sich der für die Theorie der Modulfunctionen fundamentale Satz:

„Die Function

$$\Delta(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} \cdot q^2 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k})^{24}$$

bleibt ungeändert, wenn ω_1 und ω_2 beliebigen homogenen linearen ganzzahligen Transformationen der Determinante ± 1 unterworfen werden.“

§ 5.

Modulfunctionen.

Wir haben im ersten Capitel gesehen, dass sich die positive Halbebene ω den linearen Transformationen $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ entsprechend in unendlich viele Dreiecksgebiete zerlegen lässt.

Jeder beliebige Punkt ω mit endlicher positiver Ordinate war einem und nur einem Punkte des Ausgangsraumes äquivalent, wenn man zu dem Innern des letzteren noch die Hälfte seiner Begrenzung, etwa die links von der Axe der rein imaginären Zahlen liegende, hinzunahm.

Die Axe der rein imaginären Zahlen zerlegt den Ausgangsraum in zwei symmetrische Dreiecksgebiete, von denen wir das eine, dessen Ecken die Punkte $\omega = \rho = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $\omega = i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ und $\omega = i \cdot \infty$ sind, zur Unterscheidung vom anderen schraffiren wollen.

Nach Riemann'schen Anschauungen*) giebt es nun eine im Innern dieses schraffirten Gebietes eindeutige und überall stetige Function $J(\omega)$, die die Abbildung desselben auf die positive Halbebene J vermittelt, wobei der Begrenzung jenes Gebietes die Begrenzung der positiven Halbebene J , d. i. die Axe der reellen Zahlen entspricht. Die so

*) Vgl. Dedekind, l. c. pag. 274.

definierte Function $J(\omega)$ enthält noch drei reelle willkürliche Constante, über die so verfügt werden soll, dass $J(\omega)$ für die Ecken

$$0, \quad i, \quad i \cdot \infty$$

des Gebietes resp. die Werthe

$$0, \quad 1, \quad \infty$$

annimmt.

Diese Function $J(\omega)$ hat dann nach bekannten Principien*) die Eigenschaft, dass sie für äquivalente Punkte und nur für solche denselben Werth annimmt.

Da in der Umgebung des Punktes $\omega = i\infty$ $J(\omega)$ und $q^2 = e^{2i\pi\omega}$ gegenseitig *eindeutig* von einander abhängen, so folgt, dass

$$q^2 \cdot J(\omega)$$

für $\omega = i \cdot \infty$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth annimmt.

Nun kehren wir zu den oben abgeleiteten Modulformen zurück.

Bilden wir den Quotienten

$$\frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{\left(\frac{1}{12} + 20 \sum k^3 \cdot \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}}\right)^3}{q^2 \prod (1 - q^{2k})^{24}},$$

so ist dieser eine Modulfunktion von ω und also eine eindeutige Function von $J(\omega)$. Er wird für keinen Punkt des Ausgangsraumes unendlich mit Ausnahme des Punktes $\omega = i\infty$, wo das Product

$$q^2 \cdot \frac{g_2^3}{\Delta}$$

einen endlichen von Null verschiedenen Werth annimmt.

Daraus folgt: $\frac{g_2^3}{\Delta}$ ist eine lineare ganze Function von J .

Dasselbe gilt aus ähnlichen Gründen für den Quotienten $\frac{g_3^2}{\Delta}$.

Offenbar sind dabei $\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}$ und $\frac{g_3}{\sqrt{\Delta}}$ noch *eindeutige* Functionen von ω .

Es gilt aber der evidente Satz: (Mathem. Annalen XIV, p. 128).

Verzweigungsstellen von Functionen von $J(\omega)$, die eindeutige Functionen von ω sind, können nur bei $J=0, 1, \infty$ liegen, und zwar können bei $J=0$ resp. $J=1$ die Blätter der betreffenden Riemann'schen Fläche theils isolirt verlaufen, theils zu je dreien resp. zu je zweien zusammenhängen, während bei $J=\infty$ die Verzweigung irgend welche sein darf.

Demnach ist klar, dass:

$$\frac{g_2^3}{\Delta} = a \cdot J, \quad \frac{g_3^2}{\Delta} = a_1(J - 1)$$

zu setzen ist.

*) Siehe Schwarz, l. c.

Die Zahlencoefficienten a und a_1 bestimmen sich aus der Gleichung

$$a_1 g_2^3 - a g_3^2 = a a_1 \Delta$$

mit Hülfe der Reihenentwicklungen von g_2, g_3, Δ nach q .

So findet man dann die Gleichungen:

$$\frac{g_2^3}{\Delta} = J,$$

$$\frac{27 g_3^2}{\Delta} = J - 1.$$

Der hiermit functionentheoretisch erkannte Umstand, dass g_2 und g_3 für $\omega = \varrho$ resp. $\omega = i$ verschwinden, lässt sich auch leicht direct aus der ursprünglichen Definition dieser Grössen durch Doppelsummen erkennen. In der That die Glieder von

$$\sum \sum' \frac{1}{(\mu \omega + \nu)^4}$$

ordnen sich für $\omega = \varrho$ zu je dreien, wie

$$\left(\frac{1}{\mu \varrho + \nu} \right)^4,$$

$$\left(\frac{1}{(\nu - \mu) \varrho - \mu} \right)^4 = \frac{1}{\varrho} \left(\frac{1}{\mu \varrho + \nu} \right)^4,$$

$$\left(\frac{1}{-\nu \varrho + \mu - \nu} \right)^4 = \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{1}{\mu \varrho + \nu} \right)^4,$$

die sich in der Summe zerstören.

Analog ist es bei g_3 , und allgemein folgt in ähnlicher Weise:

$$G_m = 0, \quad \text{für } \omega = \varrho, \text{ wenn } m \geq 0 \pmod{3},$$

$$\text{für } \omega = i, \text{ wenn } m \geq 0 \pmod{2}.$$

§ 6.

Algebraischer Zusammenhang der Modulformen unter einander.

Schon oben fanden wir eine algebraische Relation zwischen verschiedenen Modulformen, nämlich:

$$g_2^3 - 27 g_3^2 = \Delta.$$

Alle Relationen dieser Art fliessen aus einer Ueberlegung, die nunmehr entwickelt werden soll.

Sei $\Psi(\omega_1, \omega_2)$ irgend eine eindeutige Form einer negativen ganzen Dimension $= -k$, die sich bei allen linearen Transformationen bis auf eine als Factor hinzutretende n^{te} Einheitswurzel reproducirt. (Solche Formen sollen gelegentlich als der Hauptgruppe „adjungirt“ bezeichnet werden.) Alsdann ist

$$\left\{ \frac{\Psi(\omega_1, \omega_2)}{(\sqrt[12]{\Delta})^k} \right\}^{12n}$$

eine Modulfunction von ω , und also eine eindeutige Function von J .

Setzen wir nun voraus, dass $\Psi(\omega, 1)$ an den Stellen des Ausgangsraumes, wo es unendlich wird, von einer endlichen Ordnung (in Bezug auf $J(\omega)$) unendlich wird, so wird jene eindeutige Function von J eine rationale.

Da überdies $\Psi(\omega_1, \omega_2)$ als eindeutige Function von ω_1, ω_2 vorausgesetzt wurde, so folgt, indem Functionen von J , die eindeutige Functionen von ω sind, nur bei $J = 0, 1, \infty$ in der oben angegebenen Weise verzweigt sein können:

$$\frac{\Psi(\omega_1, \omega_2)}{(\sqrt[12]{\Delta})^k} = \sqrt[3]{J^\alpha} \cdot \sqrt{(J-1)^\beta} \cdot R(J)$$

wo α, β ganze Zahlen bedeuten.

So kommt schliesslich, indem man

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta}, \quad J - 1 = \frac{27g_3^2}{\Delta}$$

rechter Hand einsetzt:

$$(A) \quad \Psi(\omega_1, \omega_2) = (\sqrt[12]{\Delta})^r \cdot \frac{G_m(g_2, g_3)}{G_n(g_2, g_3)},$$

wo G_m und G_n ganze Functionen von g_2 und g_3 bezeichnen, deren Dimensionen als Modulformen von ω_1, ω_2 resp. $-m$ und $-n$ sein mögen.

Zwischen den ganzen Zahlen k, r, m, n besteht, wegen der Gleichheit der Dimensionen der beiden Seiten von (A), die Relation:

$$k = r + m - n.$$

Auf Grund dieser Entwicklungen können wir nun folgende Sätze aufstellen (vgl. Annalen XV, pag. 86):

Eine eindeutige Form von ω_1 und ω_2 von negativem ganzen Grade, die sich bei allen linearen Transformationen nur um Einheitswurzeln ändert und im Ausgangsraum nur von endlicher Ordnung unendlich wird, lässt sich in der Form (A) darstellen und kann sich folglich nur um 12^{te} Wurzeln der Einheit ändern.

In der Form $(\sqrt[12]{\Delta})^r G_m(g_2, g_3)$ sind für $r < 0$ alle im Ausgangsraume nur für $\omega = i\infty$ unendlich gross werdenden, für $r \geq 0$ alle überhaupt nicht unendlich werdenden Formen enthalten, die sich bei linearen Transformationen nur um Einheitswurzeln als Factoren ändern.

Speciell folgt hieraus:

Die sämtlichen Functionen G_μ , $\mu > 3$, sind rationale ganze Functionen von g_2 und g_3 .

§ 7.

Zahlentheoretische Folgerungen.

Aus letzterem Umstande entspringen eine grosse Zahl zahlentheoretischer Formeln.

Die in § 3. gegebenen Reihenentwicklungen liefern nämlich nach aufsteigenden Potenzen von q^2 geordnet:

$$G_\mu(\omega_1, \omega_2) = \frac{c_\mu}{\omega_2^{2\mu}} \left(B_\mu + (-1)^\mu \cdot 4 \cdot \mu \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{2\mu-1}(n) \cdot q^{2n} \right),$$

wo c_μ einen Zahlenfactor und $\psi_{2\mu-1}(n)$ die Summe der $(2\mu-1)^{\text{sten}}$ Potenzen der Divisoren der Zahl n bedeutet.

Jede Relation zwischen den G_μ liefert daher eine Formel, welche die zahlentheoretischen Functionen $\psi_{2\mu-1}(n)$ für verschiedene Werthe μ mit einander verbindet.

Folgendes Beispiel möge zum Aufschluss über die Art dieser Formeln dienen:

Da sich G_4 als ganze rationale Function von g_2 und g_3 darstellen lassen muss, so ist

$$G_4 = a \cdot g_2^2,$$

wo a ein Zahlenfactor ist, der sich aus dem Vergleich der Anfangsglieder der Reihenentwicklungen ergibt.

Man findet so

$$1 + 480 \sum \psi_7(n) q^{2n} = \left(1 + 240 \sum \psi_3(n) \cdot q^{2n} \right)^2$$

und folglich:

$$\psi_7(n) = \psi_3(n) + 120 \{ \psi_3(1) \psi_3(n-1) + \psi_3(2) \cdot \psi_3(n-2) + \psi_3(3) \cdot \psi_3(n-3) \\ + \dots + \psi_3(n-1) \cdot \psi_3(1) \}.$$

Ist insbesondere n eine Primzahl $= p$, so folgt die Formel:

$$p^7 - p^3 = 240 \sum \psi_3 \left(\frac{p^2 - a^2}{4} \right), \\ a = 1, 3, 5, \dots, p-2$$

indem jetzt alle Zahlenpaare a und $p-a$, ($a < p$) zu einander relativ prim sind und für relativ prime m und n

$$\psi_{2\mu-1}(m) \cdot \psi_{2\mu-1}(n) = \psi_{2\mu-1}(m \cdot n)$$

ist. —

Auch für die allgemeinen Formeln giebt diese letztere Gleichung das Mittel zweckmässiger Umformung an die Hand. —

§ 8.

Die Aufstellung algebraischer Relationen zwischen den G_μ .

Nachdem wir functionentheoretisch erkannt haben, dass zwischen den G_μ unzählig viele algebraische Relationen bestehen (indem sich alle rational und ganz aus zweien von einander unabhängigen, g_2 und g_3 , zusammensetzen lassen), liegt die Frage nahe, *wie* man solche Relationen aufstellt.

Schreibt man eine der *Form* nach erkannte Gleichung zwischen den G_μ mit unbestimmten Coefficienten an, so kann man selbstverständlich diese letzteren mit Hülfe der Reihenentwicklungen der G_μ bestimmen.

Man wird aber wegen der empirischen Natur dieses Verfahrens zu keiner allgemeinen Formel gelangen. Eine solche liefert nun eine von Eisenstein*) herrührende Methode, von der wir schon in § 4. anderweitigen Gebrauch gemacht haben und auf die ich hier kurz eingehen will.

Eisenstein entnimmt der Theorie der Partialbruchzerlegung folgende Identität:

$$(A) \quad \frac{1}{p^r} \cdot \frac{1}{q^s} = \sum_{\sigma=0}^{r-1} (s + \sigma - 1)_\sigma \cdot \frac{1}{(p+q)^{s+\sigma}} \cdot \frac{1}{p^{r-\sigma}} \\ + \sum_{\tau=0}^{s-1} (r + \tau - 1)_\tau \cdot \frac{1}{(p+q)^{r+\tau}} \cdot \frac{1}{p^{s-\tau}}.$$

Man kann diese Formel, wie beiläufig bemerkt sei, direct sehr leicht erhalten, wenn man die evidente Identität:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{p+q} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p+q} \cdot \frac{1}{q}$$

r Mal nach p und s Mal nach q differenzirt.

Wir setzen nun in (A)

$$\left. \begin{array}{l} p = \mu \omega_1 + \nu \omega_2 \\ q = \mu' \omega_1 + \nu' \omega_2 \end{array} \right\} \text{ also } p + q = (\mu + \mu') \omega_1 + (\nu + \nu') \omega_2$$

und summiren über alle ganzzahligen μ, ν, μ', ν' , wobei nur die Combinationen $\mu = \nu = 0$ und $\mu' = \nu' = 0$ und endlich $\mu + \mu' = \nu + \nu' = 0$ ausgeschlossen werden sollen.

*) a. a. O. Diese schon mehrfach citirte inhaltsreiche Arbeit ist auch historisch sehr interessant. Es findet sich in ihr z. B. schon die von Weierstrass eingeführte Function pu (bei Eisenstein: $(2, x) - (2^*, 0)$), allerdings ohne dass Eisenstein die principielle Bedeutung derselben erkannt hätte. Die Formel 5, p. 285 ist geradezu identisch mit der Gleichung:

$$p'u^2 = 4pu^3 - g_2 \cdot pu - g_3.$$

Es seien überdies r und s grösser als 2. Alsdann hat man bei der Ausführung der Summation mit Vorsicht nur je die beiden letzten Glieder der Summen rechter Hand zu behandeln, indem man die bei einem beliebigen dieser Glieder willkürlich eingehaltene Reihenfolge der Summation bei allen festhalten muss.

Ich will gleich das Resultat der Summation hinschreiben, indem ich in Betreff der Ausführung auf das specielle Beispiel in § 4. oder auch auf die Eisenstein'sche Abhandlung verweise. Es wird:

$$\begin{aligned} & G_{\frac{r}{2}} \cdot G_{\frac{s}{2}} + G_{\frac{r+s}{2}} [(s+r-1)_s + (s+r-1)_r + (-1)^{s+1}] \\ &= \sum_{\sigma=0}^{r-3} (s+\sigma-1)_{s-1} \cdot G_{\frac{s+\sigma}{2}} \cdot G_{\frac{r-\sigma}{2}} + \sum_{\tau=0}^{s-3} (r+\tau-1)_{r-1} \cdot G_{\frac{r+\tau}{2}} \cdot G_{\frac{s-\tau}{2}} \\ &+ (r+s-2)_{s-1} \cdot \frac{i\pi}{6(r+s-2)} \left[\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1} \cdot \frac{\partial G_{\frac{r+s-2}{2}}}{\partial \omega_2} - \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2} \cdot \frac{\partial G_{\frac{r+s-2}{2}}}{\partial \omega_1} \right]. \end{aligned}$$

Hierbei ist der letzte von den nicht unbedingt convergirenden Summen herrührende Term vermöge des Euler'schen Satzes von homogenen Functionen und der Gleichung

$$G_1 = - \frac{i\pi}{6\omega_2} \cdot \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1}$$

umgesetzt.

Jede Grösse $G_{\frac{\alpha}{2}}$, für welche $\frac{\alpha}{2}$ keine ganze Zahl ist, ist gleich Null. Die Formel liefert daher nur dann eine Gleichung für die G_μ , wenn r und s entweder beide gerade oder beide ungerade sind; sie zieht sich in jedem besonderen Falle durch den Wegfall und die Uebereinstimmung vieler Glieder zusammen.

Das letzte Glied der Formel ist die Functionaldeterminante von $\log \Delta$ und $G_{\frac{r+s-2}{2}}$, welch' letztere demnach auch eine Modulform ist.

Dieser Umstand ist selbstverständlich; denn aus der Theorie der Invarianten fliesst unmittelbar der Satz:

„Alle invarianten Bildungen aus Modulformen sind wieder Modulformen.“*)

Gleichungen, in denen *nur* die G_μ vorkommen, gewinnt man nun, wenn man zwischen den verschiedenen Formeln, die für $r+s=t$, wo t eine fest angenommene gerade Zahl ist, bestehen, das letzte Glied eliminirt.

Neben der obigen Formel, die nur Producte von je zwei Functionen G_μ enthält, existiren noch unzählig viele andere auf analogem

*) Vgl. Annalen XV, pag. 86.

Wege zu bildende Gleichungen, in denen Producte von je n Functionen G_μ auftreten.

Differenzirt man nämlich die Identität:

$$\frac{1}{p_1} \cdot \frac{1}{p_2} \cdots \frac{1}{p_n} = \frac{1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \left(\frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}} + \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_{n-2} p_n} + \cdots \right)$$

α_1 Mal nach p_1 , α_2 Mal nach p_2 , $\cdots$, α_i Mal nach p_i , $\cdots$,
so ergibt sich eine Identität, die in ganz gleicher Weise, wie die Identität für $n = 2$ zur Aufstellung von Formeln für die G_μ benutzt werden kann.

Uebrigens sind alle diese Relationen algebraische Folgerungen aus den binären, da man mit Hülfe der letzteren successive sämtliche G_μ ($\mu > 3$) durch die beiden ersten g_2 und g_3 ausdrücken kann.

§ 9.

Differentialquotient einer Modulfunction.

Bislang haben wir uns immer die Modulfunctionen durch Quotientenbildung aus Modulformen entstanden gedacht.

Es giebt nun einen einfachen Process, der umgekehrt aus einer bekannten Modulfunction eine Modulform ableiten lehrt.

Aus den Gleichungen

$$F(\omega') = F(\omega)$$

und

$$\omega' = \frac{\alpha \omega + \beta}{\gamma \omega + \delta}$$

folgt nämlich durch einfache Differentiation:

$$\frac{1}{\omega_2'^2} \cdot \frac{dF(\omega')}{d\omega'} = \frac{1}{\omega_2^2} \cdot \frac{dF(\omega)}{d\omega},$$

wobei

$$\omega' = \frac{\omega_1'}{\omega_2'}, \quad \omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

und

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha \omega_1 + \beta \omega_2, \\ \omega_2' &= \gamma \omega_1 + \delta \omega_2 \end{aligned}$$

gesetzt ist. Daraus fließt der Satz:

Ist $F(\omega)$ irgend eine Modulfunction, die zu irgend einer Untergruppe der linearen Transformationen gehört, so ist

$$\frac{1}{\omega_2^2} \cdot \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

eine zu der isomorphen Gruppe von homogenen linearen Transformationen gehörige Modulform.

Speciell ist also $\frac{1}{\omega_2^2} \cdot \frac{dJ(\omega)}{d\omega}$ eine zur ganzen Gruppe der linearen homogenen Transformationen gehörige Modulform 2. Dimension.

Da nun $\frac{dJ(\omega)}{d\omega}$ nur für $\omega = i\infty$ im Ausgangsraume unendlich wird, und zwar so, dass

$$q^2 \cdot \frac{dJ(\omega)}{d\omega}$$

endlich und von Null verschieden ist, so folgt nach den Sätzen des § 6.:

$$\frac{1}{\omega_2^2} \cdot \frac{dJ(\omega)}{d\omega} = \frac{G_{14}(g_2, g_3)}{\Delta} = C \cdot \frac{g_2^2 \cdot g_3}{\Delta}.$$

Die Constante C bestimmt sich aus den Reihenentwicklungen, und man findet die Formel

$$\begin{aligned} \frac{dJ(\omega)}{d\omega} &= 9 \cdot \frac{\omega_2^2}{i \cdot \pi} \cdot \frac{g_2^2 \cdot g_3}{\Delta} \\ &= \frac{\omega_2^2}{i \pi} \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{\Delta} \cdot J^{\frac{2}{3}} \cdot (J - 1)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

die später, § 6. des letzten Capitels, wichtig wird.

§ 10.

Tragweite der benutzten Methoden.

Zum Schlusse dieses Kapitels will ich kurz die Richtungen andeuten, nach welchen die hier benutzten Methoden der Verallgemeinerung fähig sind.

Bei den obigen Entwicklungen kommt fast durchgängig nur die Gruppe *sämmtlicher* linearer Transformationen in Betracht. Alle bei dieser angestellten Betrachtungen lassen sich jedoch ohne Ausnahme auch bei beliebigen Untergruppen jener Transformationen in analoger Weise durchführen.

Es gelingt z. B. leicht, diejenigen Summen $\sum \sum \left(\frac{1}{\mu \omega_1 + \nu \omega_2} \right)^m$, bei denen μ und ν nicht mehr sämmtliche ganzen Zahlen durchlaufen, sondern nur alle diejenigen, die in Bezug auf einen festen Modul resp. zwei gegebenen Zahlen congruent sind, in Potenzreihen nach q umzusetzen.

Hierbei zeigt sich unter anderm, dass die von Jacobi auf pag. 103 ff. der Fundamenta entwickelten Grössen sich als solche Doppelsummen darstellen, in denen μ und ν gewisse Zahlclassen mod. 4 zu durchlaufen haben.

Zwischen diesen Doppelsummen bestehen wegen functionentheoretischer Betrachtungen, die den in § 6. angestellten analog sind, algebraische Relationen, zu deren wirklichen Aufstellung wieder die Eisenstein'schen Identitäten dienen können. Diese algebraischen Relationen können wiederum vermöge der Entwicklungen nach q zur Aufstellung zahlentheoretischer Formeln verwerthet werden u. s. w.

Die Durchführung der hierdurch gekennzeichneten Aufgaben, die in eine vollständige Theorie der Modulfunctionen gehört, würde aber einen zu grossen Umfang gewinnen, als dass ich sie hier unternehmen könnte.

Es bedarf schliesslich wohl kaum der Erwähnung, dass auch für mehr Variable ganz ähnliche Entwicklungen stattfinden.

II. Abschnitt.

Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe.

I. Capitel.

Die Existenz der Multiplicatorgleichungen erster Stufe.

§ 1.

Die zu $\sqrt[12]{\Delta}$ gehörige Untergruppe.

Unter allen im II. Capitel des I. Abschnittes abgeleiteten Functionen nimmt die Grösse

$$\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{12} \cdot \Delta(\omega_1, \omega_2) = q^2 \cdot \prod (1 - q^{2v})^{24}$$

dadurch eine ausgezeichnete Stellung ein, dass sie überall im Innern der positiven Halbebene ω endlich und von Null verschieden ist. Hieraus folgt nämlich, dass jede Potenz dieser Function, sowie ihr Logarithmus in der positiven Halbebene ω unverzweigt und also in derselben eine *eindeutige* Function ist, sofern man ihren Werth an einem bestimmten willkürlich zu wählenden Punkt ω_0 festgesetzt hat. *)

Von den Wurzeln aus Δ ist die vom grössten Index, welche noch eine *durchaus eindeutige* Function von ω_1 und ω_2 ist, die zwölfte. Aus diesem Grunde ist gerade die $\sqrt[12]{\Delta}$ von principieller Einfachheit.

Wir stellen uns nun zunächst die Aufgabe, die Untergruppe von $\sqrt[12]{\Delta}$ zu bestimmen, d. h. die Gruppe derjenigen homogenen linearen Transformationen von ω_1, ω_2 , bei denen $\sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)$ vollkommen ungeändert bleibt.

Da

$$\sqrt[12]{\Delta} = \frac{\sqrt[3]{\Delta}}{\sqrt[4]{\Delta}} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{\Delta} = (\sqrt[12]{\Delta})^4, \quad \sqrt[4]{\Delta} = (\sqrt[12]{\Delta})^3,$$

*) Siehe Dedekind, in Riemanns Werken pag. 438.

so ist klar, dass ${}^{12}\sqrt{\Delta}$ für diejenigen und *nur* für diejenigen Transformationen ungeändert bleibt, die ${}^3\sqrt{\Delta}$ und ${}^4\sqrt{\Delta}$ simultan ungeändert lassen. Das heisst, die Gruppe von ${}^{12}\sqrt{\Delta}$ besteht aus allen denjenigen Transformationen, die gleichzeitig der Gruppe von ${}^3\sqrt{\Delta}$ und der von ${}^4\sqrt{\Delta}$ angehören. *Unsere Aufgabe ist daher auf die Bestimmung dieser letzteren beiden Gruppen reducirt.* Ich will jedoch nur die Bestimmung der Gruppe von ${}^4\sqrt{\Delta}$ eingehender behandeln, da für ${}^3\sqrt{\Delta}$ Alles ganz analog und übrigens einfacher ist.

Zu dem Zwecke werden wir zunächst, den Entwicklungen des ersten Abschnitts (I. Capitel) gemäss, das Fundamentalpolygon derjenigen Gruppe nicht homogener Transformationen aufsuchen, welche nach § 5. daselbst der Gruppe von ${}^4\sqrt{\Delta}$ entspricht.

Nach dem im I. Abschnitt allgemein auseinander gesetzten Verfahren findet man, dass dieses Fundamentalpolygon aus dem Ausgangsraume ω und dem anliegenden Dreiecke $\omega + 1$ besteht.

Um die Richtigkeit dieser Angabe a posteriori einzusehen, hat man sich nur zu überzeugen:

- 1) dass das Dreieck ω allein kein vollständiges Fundamentalpolygon für unsere Gruppe ist,
- 2) dass den die Ränder vereinigenden Substitutionen:

$$(A) \quad \begin{cases} \omega' = \omega + 2 \\ \omega' = \frac{\omega - 1}{\omega} \end{cases}$$

homogene Transformationen entsprechen, die ${}^4\sqrt{\Delta}$ ungeändert lassen.

Was den ersten Punkt betrifft, so folgt derselbe aus dem Umstande, dass keine der beiden homogenen Substitutionen, die der Substitution

$$\omega' = \omega + 1$$

entsprechen, ${}^4\sqrt{\Delta}$ ungeändert lässt.

In Bezug auf den zweiten Punkt ist zu bemerken, dass die folgenden, den (A) entsprechenden, Transformationen der gestellten Anforderung genügen:

$$(1) \quad \begin{cases} \omega_1' = -\omega_1 - 2\omega_2, \\ \omega_2' = -\omega_2, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \omega_1' = -\omega_1 + \omega_2, \\ \omega_2' = -\omega_1. \end{cases}$$

Es bestehen nämlich die Formeln:

$$(B) \quad \begin{cases} {}^{12}\sqrt{\Delta}(\omega_1 + \omega_2, \omega_2) = e^{\frac{i\pi}{6}} {}^{12}\sqrt{\Delta}(\omega_1, \omega_2), \\ {}^{12}\sqrt{\Delta}(-\omega_2, \omega_1) = e^{\frac{9i\pi}{6}} {}^{12}\sqrt{\Delta}(\omega_1, \omega_2). \end{cases}$$

Von denselben ergibt sich die erste unmittelbar aus der Reihenentwicklung von $\sqrt[12]{\Delta}$. Die letztere erhält man, wenn man bemerkt, dass sich $\sqrt[12]{\Delta}(-\omega_2, \omega_1)$ und $\sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)$ jedenfalls nur um eine 12^{te} Einheitswurzel unterscheiden können, und dass sich diese Einheitswurzel selbst sofort aus den Reihenentwicklungen ergibt, wenn man $\frac{\omega_1}{\omega_2} = i$ setzt, in welchem Falle ja

$$q = e^{i\pi\omega} = q' = e^{-\frac{i\pi}{\omega}}$$

wird.

Da alle Transformationen sich aus den beiden $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zusammensetzen lassen, so genügen die Formeln (B) um jede beliebige *numerisch* gegebene Substitution darauf hin zu untersuchen, ob sie $\sqrt[12]{\Delta}$ ungeändert lässt oder nicht. Speciell erkennt man nun so, dass die Transformationen (1) und (2) $\sqrt[4]{\Delta}$ in der That ungeändert lassen. Nach den Entwicklungen des I. Abschnittes sind also die Transformationen (A) die erzeugenden Transformationen der in Rede stehenden Gruppe von nicht homogenen Substitutionen.

Dem entspricht vermöge des Isomorphismus:

„Die Gruppe von $\sqrt[4]{\Delta}$ besteht aus allen Substitutionen, die sich durch Combination der Substitutionen (1) und (2) ergeben.“

§ 2.

Fortsetzung.

Durch die eine oder die andere der beiden in Abschn. I., Cap. I., § 4. auseinandergesetzten Methoden findet man nun:

Die Gruppe von $\sqrt[4]{\Delta}$ ist eine Congruenzgruppe und zwar der 4^{ten} Stufe.

Sie besteht aus allen Substitutionen, die zu einer der folgenden 12 (mod. 4) congruent sind:

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Es ergibt sich nämlich — um nur die Anwendungsweise der zweiten Untersuchungsmethode hier näher anzuführen —, dass durch Zusammensetzung der erzeugenden Substitutionen (1) und (2) mod. 4 nur die 12 soeben hingeschriebenen Substitutionen entstehen. —

Die den letzten acht Schematen congruenten Substitutionen lassen sich kurz als alle diejenigen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bezeichnen, bei denen

$$a + d \equiv -1 \pmod{4}$$

ist.

Die Gruppe der 12 (mod. 4) genommenen Substitutionen ist der Tetraedergruppe holodrisch isomorph. —

Ganz analog ergibt sich die Gruppe von $\sqrt[3]{\Delta}$ als Gesamtheit aller derjenigen Transformationen, welche (mod. 3) einem der folgenden 8 Schemata congruent sind:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \mp 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \mp 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

wo in jedem Schema immer alle oberen Zeichen oder alle unteren Zeichen zusammengehören.

Die den letzten 6 Schematen congruenten Substitutionen lassen sich wieder kurz als diejenigen Substitutionen charakterisiren, für welche

$$a + d \equiv 0 \pmod{3}$$

ist.

Nimmt man die für $\sqrt[4]{\Delta}$ und $\sqrt[3]{\Delta}$ erhaltenen Resultate zusammen, so folgt die Untergruppe von $\sqrt[12]{\Delta}$. Insbesondere zeigt sich, dass die Untergruppe von $\sqrt[12]{\Delta}$ eine Congruenzgruppe der 12. Stufe ist.

§ 3.

Bestimmung der 12^{ten} Einheitswurzel, um welche sich $\sqrt[12]{\Delta}$ bei irgend einer Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ändert.

Nach Bestimmung der Gruppe von $\sqrt[12]{\Delta}$ hat es keine Schwierigkeit mehr, die Einheitswurzel $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, um welche sich $\sqrt[12]{\Delta}$ bei einer beliebigen Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ändert, in geschlossener Form anzugeben.

Ist zunächst $c \not\equiv 0 \pmod{3}$, so kann man ξ so bestimmen, dass in der zusammengesetzten Transformation

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \xi c & b + \xi d \\ c & d \end{pmatrix}$$

die Summe $a + \xi c + d \equiv 0 \pmod{3}$ wird. Es ist nämlich nur

$$\xi \equiv -c(a + d) \pmod{3}$$

zu setzen.

Dann gehört aber (§ 2.) die Transformation rechter Hand zur Untergruppe von $\sqrt[3]{\Delta}$, und es folgt somit:

Die dritten Einheitswurzeln, um welche sich $\sqrt[3]{\Delta}$ bei den Substitutionen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & c(a+d) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ändert, sind einander gleich.

Also:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^4 = e^{c(a+d) \cdot \frac{2i\pi}{3}},$$

wenn

$$c \geq 0 \pmod{3}.$$

Für

$$c \equiv 0 \pmod{3}$$

ist gewiss

$$d \geq 0 \pmod{3},$$

da ja

$$ad - bc = 1.$$

Es ist folglich auf

$$\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

das soeben erhaltene Resultat anwendbar.

Somit ist:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^4 = e^{d(b-c) \frac{2i\pi}{3}} = e^{db \frac{2i\pi}{3}},$$

wenn

$$c \equiv 0 \pmod{3}.$$

Stillschweigend ist hierbei von den Formeln (B) pag. 40 Gebrauch gemacht.

Diese beiden Resultate lassen sich nun so zusammenziehen:

In allen Fällen ist:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^4 = e^{[(a+d) \cdot c + db(1-c^2)] \frac{2i\pi}{3}}.$$

Aehnlich ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^3 = e^{c(a+d+1) \frac{i\pi}{2}}, \quad c \geq 0 \pmod{2},$$

$$= e^{\{d(b-c+1)-1\} \frac{i\pi}{c}}, \quad c \equiv 0 \pmod{2},$$

also allgemein:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^3 = e^{[c(a+d+c^2) + (1-c^2)\{d(b-c+1)-1\}] \frac{i\pi}{2}}.$$

Nach einigen leichten Umformungen findet man nun:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = e^{\{ (1-c^2)[db+3d(c-1)+c+3] + c(d+a-3) \} \frac{i\pi}{6}}$$

als diejenige 12^{te} Einheitswurzel mit der $\sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)$ multiplicirt wird, wenn man ω_1, ω_2 der linearen Transformation $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ unterwirft.*)

§ 4.

Transformationsproblem.

Eine Eigenthümlichkeit, die den einfachen transcendenten Functionen gemeinsam ist, besteht darin, dass die Function für Argumente, die in einfachem Zusammenhange stehen, Werthe annimmt, die durch eine algebraische Gleichung verknüpft sind.

Diese Bemerkung rechtfertigt die Frage:

Wie muss eine algebraische Gleichung

$$f(\omega, \omega') = 0$$

beschaffen sein, damit nur eine endliche Zahl von inäquivalenten Werthen ω' (resp. ω) hervorgehe, wenn man für ω (resp. ω') alle einem beliebigen Werthe äquivalenten Werthe in $f = 0$ einträgt?†)

Offenbar nur für solche Gleichungen zwischen ω und ω' wird es zutreffen können, dass der Werth einer Modulfuction für ω mit dem für ω' in einem algebraischen Zusammenhange steht.

Nimmt man die Gleichung $f = 0$ in ω und ω' vom ersten Grade an, so zeigt sich, dass jede bilineare Relation zwischen ω und ω' , die rationale Zahlen-Coefficienten hat, der gestellten Anforderung genügt.

Ist F eine Modulfuction, so wollen wir die Untersuchung des Zusammenhanges zwischen $F(\omega)$ und $F(\omega')$, wo ω und ω' durch eine solche bilineare Gleichung verbunden sind, „*Transformationsproblem*“**) nennen. Man führt das Transformationsproblem leicht auf die Untersuchung des Zusammenhanges zwischen $F(\omega)$ und $F(\frac{\omega}{n})$ ***) zurück, wo n irgend eine positive ganze Zahl ist.

*) In expliciter Form scheint sich der für $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ gegebene Ausdruck in der Literatur nicht vorzufinden. Man erhält ihn aber sofort, wenn man den bei $\sqrt[8]{\Delta}$ vortretenden, aus der Theorie der Θ -Functionen bekannten Factor mit der dritten Einheitswurzel combinirt, welche bei der Transformation von $\sqrt[3]{\Delta}$ auftritt, und die sich durch die Modulfuction $\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}$ leicht bestimmt.

**) Die Beziehung zwischen ω und ω' ist bekanntlich die bei der „Transformation“ der elliptischen Functionen zwischen den Periodenverhältnissen stattfindende.

***) Diese Vereinfachung der Fragestellung bietet wesentliche Vortheile dar. Vgl. Mathem. Annalen Bd. XIV, p. 130, 161, Bd. XVII, p. 62 ff.

†) Es ist mir neuerdings gelungen, nachzuweisen, dass eine so beschaffene Gleichung *nothwendig bilinear* in ω und ω' ist.

Ganz analoge Fragestellungen werden für die Modulformen stattfinden.

Hier wollen wir unter „Transformationsproblem“ die Untersuchung des Zusammenhanges zwischen den Werthen einer Modulform für ω_1, ω_2 und dem für ω_1', ω_2' verstehen, wenn

$$\omega_1' = \frac{\omega_1}{n},$$

$$\omega_2' = \omega_2$$

gesetzt wird, wo n wieder eine positive ganze Zahl bedeutet.

§ 5.

Fortsetzung. Anzahl der Repräsentanten.

Bei der Behandlung des Transformationsproblems der Modulformen wird es vor allem nöthig sein, die Frage zu erledigen:

Wie viele inäquivalente Zahlenpaare ω_1', ω_2' entstehen, wenn man ω_1, ω_2 durch alle möglichen äquivalenten Zahlenpaare $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$ ersetzt?

Soll zunächst das Zahlenpaar $\frac{\omega_1}{n}, \omega_2$, mit

$$\frac{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2}{n}, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 = \alpha \cdot \frac{\omega_1}{n} + \frac{\beta}{n} \cdot \omega_2, \quad n \cdot \gamma \cdot \frac{\omega_1}{n} + \delta \cdot \omega_2$$

äquivalent sein, so ist klar, dass hierfür

$$\beta \equiv 0 \pmod{n}$$

nothwendige und hinreichende Bedingung ist.

Ersetzt man hier nun ω_1, ω_2 durch ein äquivalentes Zahlenpaar und bezeichnet mit $P^{(n)}$ das zu der Transformation

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gehörige Zahlenpaar:

$$\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{n}, \quad c\omega_1 + d\omega_2,$$

so folgt:

Zwei Zahlenpaare $P^{(n)}$ und $Q^{(n)}$ sind dann und nur dann äquivalent, wenn

$$P = S \cdot Q$$

ist, wo

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

eine Substitution der Untergruppe

$$\beta \equiv 0 \pmod{n}$$

ist.

Und zwar geht dann das Zahlenpaar $P^{(n)}$ aus dem Zahlenpaare $Q^{(n)}$ durch die Transformation

$$S' = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{n} \\ n\gamma & \delta \end{pmatrix}$$

hervor. Dies wollen wir symbolisch durch

$$P^{(n)} = S'(Q^{(n)})$$

andeuten.

In Bezug auf die hier auftretende Untergruppe

$$\beta \equiv 0 \pmod{n}$$

bemerkt man Folgendes:

Unter allen $(\text{mod. } n)$ verschiedenen Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ giebt es, wie leicht zu sehen,

$$n \cdot \varphi(n) = n^2 \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right) \dots$$

in denen $\beta \equiv 0 \pmod{n}$ ist.

Daher ist der Index unserer Untergruppe:

$$N = \frac{n^3 \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) \dots}{n^2 \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right) \dots} = n \left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{q}\right) \dots$$

Und nun folgt hieraus als Antwort auf die eingangs gestellte Frage:

Alle (bei festen, aber willkürlichen ω_1, ω_2) überhaupt möglichen Zahlenpaare $P^{(n)}$ vertheilen sich in

$$N = n \left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{q}\right) \dots$$

Classen. Jede Classe enthält nur untereinander äquivalente Zahlenpaare; dagegen sind je zwei verschiedenen Classen angehörige Zahlenpaare zu einander inäquivalent.“

Greift man aus jeder Classe ein beliebiges aber bestimmtes Zahlenpaar heraus, so hat man in diesen N Zahlenpaaren ein vollständiges System von „Repräsentanten“, indem jedes Zahlenpaar $P^{(n)}$ mit einem und nur einem jener N äquivalent ist.

Bilden

$$T_1^{(n)}, T_2^{(n)}, \dots, T_N^{(n)}$$

ein solches System von Repräsentanten, so ist dieses offenbar auch dann noch der Fall, wenn jedes T_i durch $S_i T_i$ ersetzt wird, wo S_i eine willkürlich gewählte Substitution der Untergruppe $\beta \equiv 0 \pmod{n}$ ist. *)

*) Und zwar erhält man so *alle* Repräsentantensysteme aus einem bestimmten.

§ 6.

Die Gleichung, der die „transformirte“ $\sqrt[12]{\Delta}$ genügt.
(Multiplicatorgleichung erster Stufe.)

Man kann die Transformationen S_i , mit Hülfe deren man irgend ein System von Repräsentanten abändern kann, dazu verwenden, die Repräsentanten für bestimmte Absichten möglichst zweckmässig zu gestalten, z. B. so, dass die in sie eingehenden Zahlen bestimmten Congruenzen Genüge leisten.*)

Wir wollen sie hier speciell so wählen, dass alle Repräsentanten

$$\frac{A_i \omega_1 + B_i \omega_2}{n}, \quad C_i \omega_1 + D_i \omega_2$$

den Bedingungen

$$A_i, B_i, C_i, D_i \text{ resp. } \equiv 1, 0, 0, 1 \pmod{12}$$

genügen.

Dieses wird immer möglich sein, so lange n relativ prim zu 12 ist, was wir von jetzt ab, sofern nicht das Gegentheil ausdrücklich festgesetzt wird, voraussetzen wollen.

Nun können wir den für das folgende fundamentalen Satz aufstellen:

„Die symmetrischen Functionen der N Grössen

$$z_i = \sqrt[12]{\Delta} \{T_i^{(n)}\} = \sqrt[12]{\Delta} \left\{ \frac{\alpha_i \omega_1 + \beta_i \omega_2}{n}, \quad \gamma_i \omega_1 + \delta_i \omega_2 \right\},$$

wo die $T_i^{(n)}$ in der soeben angegebenen Weise gewählte Repräsentanten sind, ändern sich bei beliebigen Substitutionen von ω_1, ω_2 nur um 12^{te} Wurzeln der Einheit.“

In der That sei P irgend eine homogene lineare Transformation. Dann gehen die im Satze erwähnten Grössen bei Anwendung dieser Substitution auf ω_1, ω_2 über in:

$$\sqrt[12]{\Delta} \{(T_i P)^{(n)}\}.$$

Es ist aber, da ja die T ein volles Repräsentantensystem bilden,

$$(1) \quad T_i P = S_i \cdot T_j,$$

wo

$$S_i = \begin{pmatrix} a_i & n b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$(2) \quad (T_i P)^{(n)} = S'_i (T_j^{(n)}),$$

wo

$$S'_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ n c_i & d_i \end{pmatrix}.$$

*) Das allgemeine Princip vergl. Annalen XVII, pag. 67.

z_i geht also über in z_j multiplicirt mit derjenigen Einheitswurzel, um die sich $\sqrt[12]{\Delta}$ bei Anwendung der Substitution S'_i ändert.

Nun folgt aus (1), da

$$T_i \equiv T_j \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{12},$$

$$S_i \equiv P \pmod{12}.$$

Also sind alle S_i und folglich auch alle S'_i mod. 12 congruent, bringen also (§ 3.) dieselbe Aenderung (12^{te} Einheitswurzel), auf $\sqrt[12]{\Delta}$ angewandt, hervor. Daraus folgt sofort die Richtigkeit unseres Satzes.

Combiniren wir nun diesen mit den Sätzen pag. 33 (unten), indem wir berücksichtigen, dass die Grössen $z_i \cdot \omega_2$ im Ausgangsraum nirgends unendlich gross werden (was zur Evidenz aus den im folgenden Paragraphen zu gebenden Productentwicklungen der z_i hervorgeht), so haben wir den Satz gewonnen, auf den wir zustrebten:

„Die Grösse $\sqrt[12]{\Delta} \left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2 \right)$ ist für Zahlen n , welche zu 12 relativ prim sind, Wurzel einer Gleichung vom Grade

$$N = n \left(1 + \frac{1}{p} \right) \left(1 + \frac{1}{q} \right) \dots,$$

deren Coefficienten bis auf einen Factor von der Gestalt $\sqrt[12]{\Delta} (\omega_1, \omega_2)^r$ ganze rationale Functionen von $g_2(\omega_1, \omega_2)$ und $g_3(\omega_1, \omega_2)$ sind.“

Diese Gleichung wollen wir Multiplicatorgleichung erster Stufe nennen, eine Benennung, die sich aus dem Umstande rechtfertigt,

dass die Grösse $\frac{\sqrt[12]{\Delta} \left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2 \right)}{\sqrt[12]{\Delta} (\omega_1, \omega_2)}$ bei Transformation des durch $\sqrt[12]{\Delta}$ normirten elliptischen Integrals als „Multiplicator“ auftritt (Math. Annalen XIV, p. 144) und dass wir andererseits $\sqrt[12]{\Delta}$ als eine der Hauptgruppe (der Gruppe erster Stufe) „adjungirte“ Form bezeichnen dürfen. (Siehe pag. 33.)

§ 7.

Explicite Formeln für die Wurzeln der Multiplicatorgleichung.

Die Wurzeln unserer Gleichung waren:

$$\begin{aligned} z_i &= \sqrt[12]{\Delta} \left\{ \frac{\alpha_i \omega_1 + \beta_i \omega_2}{n}, \gamma_i \omega_1 + \delta_i \omega_2 \right\} \\ &= n \cdot \sqrt[12]{\Delta} \{ (\alpha_i \omega_1 + \beta_i \omega_2), n(\gamma_i \omega_1 + \delta_i \omega_2) \}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{12}$$

war, und sämtliche $\frac{\alpha_i \omega_1 + \beta_i \omega_2}{n}$, $\gamma_i \omega_1 + \delta_i \omega_2$ ein volles System von Repräsentanten bildeten. Für die Darstellung dieser Wurzeln durch Potenzreihen oder zunächst durch unendliche Producte nach q müssen diese Repräsentanten nothwendig modificirt werden.

Nun zeigt man aber durch leichte arithmetische Betrachtungen:*)

Jedes Zahlenpaar

$$\alpha \omega_1 + \beta \omega_2, \quad n(\gamma \omega_1 + \delta \omega_2)$$

ist einem einzigen Zahlenpaare

$$a \omega_1 + b \omega_2, \quad d \omega_2$$

äquivalent, wobei

$$a \cdot d = n, \quad b < d,$$

und überdies a, b, d nicht-negative ganze Zahlen ohne einen allen dreien gemeinsamen Theiler sind.

Es ist nämlich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha \omega_1 + \beta \omega_2 &= \alpha' (a \omega_1 + b \omega_2) + \beta' d \omega_2; & \alpha' \delta' - \beta' \gamma' &= 1, \\ n \gamma \omega_1 + n \delta \omega_2 &= \gamma' (a \omega_1 + b \omega_2) + \delta' d \omega_2; \end{aligned}$$

oder:

$$(I) \quad \begin{cases} \alpha = \alpha' a; & \beta = \alpha' b + \beta' d; \\ n \gamma = \gamma' a; & n \delta = \gamma' b + \delta' d; \end{cases} \quad \alpha' \delta' - \beta' \gamma' = 1,$$

in folgender Weise lösbar:

Man nenne den grössten gemeinsamen Theiler von α und n (also auch von α und $n \cdot \gamma$) a . Dann wird

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha' \cdot a \\ n \gamma &= \gamma' \cdot a \end{aligned} \right\},$$

wo α' und γ' relativ prim zu einander sind. Man setze ferner

$$d = \frac{n}{a}$$

und löse die Gleichung

$$\alpha' \delta' - \beta' \gamma' = 1$$

durch die Formeln

$$\left. \begin{aligned} \delta' &= \delta_0 + t \gamma' \\ \beta' &= \beta_0 + t \alpha' \end{aligned} \right\},$$

indem man unter δ_0, β_0 irgend eine Lösung versteht. Schliesslich bestimme man die ganze Zahl t so, dass

*) Vgl. z. B. Dedekind, Crelle's Journal Bd. 88, p. 287 ff.

$$b = \delta_0 \cdot \beta - \beta_0 \cdot n\delta - t \cdot d$$

nicht negativ und $< d$ wird.

Dann sind alle Gleichungen (I) befriedigt, und also $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2$, $n(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2)$ äquivalent mit $a\omega_1 + b\omega_2$, $d\omega_2$.

Indem man sich nun überzeugt, dass zwei verschiedene Zahlenpaare

$$a\omega_1 + b\omega_2, d\omega_2; \quad a_1\omega_1 + b_1\omega_2, d_1\omega_2$$

die den angegebenen Bedingungen ($ad = a_1d_1 = n$, $b < d$, $b_1 < d_1$ etc.) genügen, nie äquivalent sein können, so ist klar, dass jedes Zahlenpaar

$$\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad n(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2)$$

einem und nur einem Zahlenpaare

$$a\omega_1 + b\omega_2, \quad d\omega_2$$

äquivalent ist.

Auch umgekehrt ist aber leicht zu sehen, dass zu jedem $a\omega_1 + b\omega_2$, $d\omega_2$ äquivalente Zahlenpaare $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2$, $n(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2)$ gefunden werden können, so dass also das Entsprechen zwischen den Repräsentanten $\alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2$, $n(\gamma_i\omega_1 + \delta_i\omega_2)$ und den Zahlenpaaren $a\omega_1 + b\omega_2$, $d\omega_2$ eindeutig umkehrbar ist.*)

Es folgt nun aus $\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{12}$ und aus dem Gleichungssystem I, dass

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & -nb \\ 0 & a \end{pmatrix} \pmod{12}$$

ist, wo $\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ diejenige Substitution ist, die

$$\alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2, \quad n(\gamma_i\omega_1 + \delta_i\omega_2)$$

aus dem entsprechenden

$$a\omega_1 + b\omega_2, \quad d\omega_2$$

entstehen lässt.

Somit ist, da die Wurzel z_i oder vielmehr $\frac{1}{n} z_i$ aus

$$\sqrt[12]{\Delta} \{a\omega_1 + b\omega_2, d\omega_2\}$$

durch Anwendung der Transformation $\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ hervorgeht, nach der Formel pag. 44:

$$z_i = n \cdot e^{\frac{[-bd+3(a-1)]i\pi}{6}} \sqrt[12]{\Delta} \{a\omega_1 + b\omega_2, d\omega_2\},$$

(wobei mehrfach von den selbstverständlichen Congruenzen

$$a^2 \equiv d^2 \equiv 1 \pmod{12}$$

Gebrauch gemacht ist).

*) Am leichtesten folgt dieses aus der pag. 69 bewiesenen Thatsache, dass die Anzahl der $a\omega_1 + b\omega_2$, $d\omega_2$ mit der der Repräsentanten übereinstimmt.

Durch Anwendung der Productenentwicklung von $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ pag. 30 kommt nun für die Wurzel der Multiplikatorgleichung folgende explicite Formel:

$$z_i(a, d, b) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right) (-1)^{\frac{a-1}{2}} \varepsilon \cdot a^b \left(\frac{1-d^2}{12}\right) \cdot a \cdot q^{\frac{a}{6d}} \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \varepsilon^{vab} q^{\frac{a}{d} \cdot 2v}\right)^2,$$

wobei

$$\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}, \quad q = e^{i\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}}$$

ist.

§ 8.

Durch 2 oder 3 theilbare Transformationsgrade.

Ist n (der „Transformationsgrad“) nicht mehr relativ prim zu 12, so werden die Betrachtungen, die zur Existenz der Multiplikatorgleichung führten, hinfällig. Indessen lassen sich leicht analoge Untersuchungen durchführen, und ich will hier kurz die dabei entstehenden Resultate angeben.

1) Ist $n = 2^\mu \cdot m$, $\mu > 0$ und m relativ prim zu 6, so gelingt es nicht mehr die Repräsentanten $T^{(n)}$ so zu wählen, dass die symmetrischen Functionen der für sie gebildeten $\sqrt[12]{\Delta}$ bei beliebigen linearen Transformationen sich nur mit 12^{ten} Einheitswurzeln multipliciren. Dieses ist jedoch noch zu erreichen, wenn wir statt $\sqrt[12]{\Delta}$ die $\sqrt[3]{\Delta}$ in Betracht ziehen. Denn wir können, da n nicht durch 3 theilbar ist, die Repräsentanten so annehmen, dass ihre Zahlen

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ resp. } \equiv 1, 0, 0, 1 \pmod{3}$$

werden, und dann gelten für $\sqrt[3]{\Delta}$ noch dieselben Schlüsse wie oben für $\sqrt[12]{\Delta}$. Es folgt:

Der Ausdruck

$$\sqrt[3]{\Delta}\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right), \text{ wo } n = 2^\mu \cdot m, \text{ } m \text{ relativ prim zu 6,}$$

genügt einer Gleichung vom Grade

$$n\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{q}\right) \cdots,$$

deren Coefficienten bis auf einen Factor von der Form $(\sqrt[3]{\Delta})^r$ ganze rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.

Ihre Wurzeln sind:

$$z(a, d, b) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 a^4 \cdot \varepsilon^{ab} \left(\frac{1-d^2}{3}\right) q^{\frac{2a}{3d}} \prod \left(1 - \varepsilon^{vab} q^{\frac{a}{d} \cdot 2v}\right)^8,$$

wo a, d, b alle nicht-negative Zahlen zu durchlaufen haben, so dass für jedes Tripel a, d, b

$$a \cdot d = n, \quad b < d$$

ist, und a, d, b keinen allen dreien gemeinsamen Theiler besitzen.

2) Ganz analog verhält sich die Sache, wenn

$$n = 3^r \cdot m, \quad m \text{ relativ prim zu } 6,$$

ist.

Dann ergibt sich:

Der Ausdruck $\sqrt[n]{\Delta} \left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2 \right)$, wo $n = 3^r \cdot m$, m relativ prim zu 6, genügt einer Gleichung vom Grade $n \left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{q}\right) \dots$, deren Coefficienten bis auf einen Factor der Gestalt $(\sqrt[n]{\Delta})^r$ ganze rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$z(a, d, b) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2} \right)^3 \cdot a^3 \cdot \varepsilon^{ab \cdot \left(\frac{1-d^2}{4} \right)} q^{\frac{a}{3d}} \prod \left(1 - \varepsilon^{rab} q^{\frac{a}{d} 2^r} \right)^6.$$

3) Ist schliesslich n durch 6 theilbar, so genügt erst Δ selbst einer Gleichung $n \left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{q}\right) \dots$ Grades, deren Coefficienten dann rationale ganze Functionen von g_2 und g_3 sind.

II. Capitel.

Eigenschaften der Multiplicatorgleichung erster Stufe.

§ 1.

Gruppe der Multiplicatorgleichung.

“Die Monodromiegruppe der Multiplicatorgleichung besteht aus allen Permutationen ihrer Wurzeln, welche entstehen, wenn man auf ω_1 und ω_2 die sämtlichen Substitutionen eines vollen Systems mod. n verschiedener und mod. 12 der Identität congruenter Substitutionen anwendet.

Dabei sind zwei Substitutionen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

mod. n als congruent zu betrachten, wenn

$$a : b : c : d = a' : b' : c' : d' \pmod{n},$$

so dass die genannte Gruppe also der Monodromiegruppe der Modulargleichung holodrisch isomorph ist.“

Dass eine rationale Function der Wurzeln $z_i = \sqrt[n]{\Delta} \{T_i^{(n)}\}$, welche als rationale Function von $\sqrt[n]{\Delta}$, g_2 , g_3 darstellbar ist, die in Rede stehenden Permutationen zulässt, ist evident. Es handelt sich darum,

zu zeigen, dass 1) alle diese Permutationen verschieden sind und dass 2) jede rationale Function der Wurzeln z_i , welche die Permutationen zulässt, als rationale Function von $\sqrt[12]{\Delta}$, g_2 , g_3 dargestellt werden kann. Hierbei dürfen wir uns offenbar auf homogene ganze Functionen der z_i beschränken.

1) Eine beliebige homogene Substitution auf ω_1 und ω_2 angewandt wird die Wurzel z_i in eine Wurzel z_k verwandeln, letztere multiplicirt mit einer gewissen nur von der Substitution abhängenden 12^{ten} Einheitswurzel (p. 47 und 48). Indem wir von dieser 12^{ten} Einheitswurzel vorläufig absehen, wollen wir sagen, jene Substitution bewirke eine gewisse Permutation der Wurzeln, indem z_i in z_k übergeführt wird.

Nun haben wir folgenden Satz:

„Zwei Substitutionen P und P' bewirken dann und nur dann dieselben Permutationen der Wurzeln z_i , wenn P und P' in dem eingangs präcisirten Sinne mod. n congruent sind.“

In der That, sollen P' und P dieselbe Permutation bewirken, so muss (p. 45)

$$T_i P = S_i T_i P'$$

sein, wo S_i eine Substitution der Untergruppe

$$\beta \equiv 0 \pmod{n}$$

ist, und T_i irgend einen der schon früher so bezeichneten Repräsentanten bedeutet. Somit folgt:

$$S_i = T_i P P'^{-1} T_i^{-1}.$$

Setzt man jetzt $P P'^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so ergibt sich, indem man T_i die Repräsentanten

$$\omega_1 + 12\alpha\omega_2, \quad \omega_2, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

durchlaufen lässt, dass nothwendig

$$a \equiv d \equiv k \quad \text{und} \quad b \equiv c \equiv 0 \pmod{n}$$

sein muss, wo $k^2 \equiv 1 \pmod{n}$ ist.

Man hat also

$$P P'^{-1} \equiv \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \pmod{n}$$

und folglich in dem angegebenen Sinne

$$P \equiv P' \pmod{n}.$$

Dass diese Congruenz auch hinreichend ist, damit P und P' dieselbe Permutation bewirken, ist leicht zu verificiren.

2) Lässt nun eine homogene Function der Wurzeln z_i alle die ω -Substitutionen S zu, welche mod. 12 der Identität congruent sind, mod. n aber ein vollständiges System incongruenter Substitutionen bilden,

so ist klar, dass sich diese Function bei beliebigen ω -Substitutionen nur um eine 12^{te} Einheitswurzel, die als Factor hinzutritt, ändern kann. Denn jede beliebige ω -Substitution T bewirkt ja dieselbe Permutation der Wurzeln z_i , wie diejenige unter den Substitutionen S , die ihr mod. n congruent ist, nur dass noch zu jeder Wurzel ein und dieselbe 12^{te} Einheitswurzel hinzutritt.

Somit ist die Function der Wurzeln z_i nach den Entwicklungen in § 6. des 2. Cap. des ersten Abschnitts eine ganze Function von g_2 und g_3 multiplicirt in eine positive Potenz von $\sqrt[12]{\Delta}$. Der eingangs aufgestellte Satz ist hiermit vollständig erwiesen. Ueberdies haben wir offenbar gleichzeitig den Satz gewonnen:

„Jede rational bekannte, in den Wurzeln z_i ganze rationale und homogene Function ist bis auf einen Factor $(\sqrt[12]{\Delta})^r$ eine ganze rationale Function von g_2 und g_3 .“

§ 2.

Nähere Angaben über die Coefficienten der Multiplicatorgleichung.

Zur wirklichen numerischen Berechnung der Multiplicatorgleichung kann man zwei Methoden verwenden.

Entweder man berechnet, wie Herr Kiepert*), die symmetrischen Functionen der Wurzeln, indem man sie gleichsetzt $(\sqrt[12]{\Delta})^r$ multiplicirt in eine ganze Function von g_2 und g_3 mit unbestimmten Coefficienten und sodann r und die unbestimmten Coefficienten vermöge der Reihenentwicklungen nach q bestimmt.

Oder man schreibt die Gleichung mit unbestimmten Coefficienten hin, setzt für g_2 , g_3 , $\sqrt[12]{\Delta}$ ihre Entwicklungen nach q ein und für die Unbekannte die Entwicklung einer speciellen Wurzel, etwa:

$$z(n, 1, 0) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2} \right) (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n q^{\frac{n}{6}} \prod (1 - q^{n \cdot 2^r})^2,$$

worauf sich wiederum die Zahlencoefficienten durch Nullsetzen der Coefficienten gleich hoher Potenzen von q ergeben.

Während die erste Methode zur praktischen Berechnung der Gleichungen den Vorzug verdient, erlaubt die letztere zunächst den Schluss:

*Die Multiplicatorgleichung enthält nur rationale Zahlencoefficienten.**)*

Denn alle in Betracht kommenden Reihenentwicklungen haben rationale Zahlencoefficienten.

*) l. c. p. 209.

**) Ob diese Coefficienten in allen Fällen (wie Annalen Bd. XV, pag. 87 behauptet wird) ganze Zahlen sind, konnte ich bislang nicht entscheiden.

Sei nun

$$z^N + A_1 z^{N-1} + \dots + A_i \cdot z^{N-i} + \dots + A_N = 0$$

unsere Gleichung, wobei

$$N = n \left(1 + \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{q}\right) \dots$$

Es sei

$$A_i = (\sqrt[12]{\Delta})^{r_i} G_{k_i}(g_2, g_3),$$

wo $G_{k_i}(g_2, g_3)$ eine ganze rationale Function von g_2 und g_3 bedeutet, die als Function von ω_1, ω_2 homogen vom $-k_i^{\text{ten}}$ Grade ist.

Da $\sqrt[12]{\Delta} \left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)$, sowie $\sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)$, in Bezug auf ω_1, ω_2 von der Dimension -1 ist, so folgt, indem alle Glieder der Gleichung dieselbe Dimension haben müssen:

$$(1) \quad r_i + k_i = i.$$

Wir wollen nun in unsere Gleichung für die Unbekannte z die Wurzel $z(n, 1, 0)$ eingetragen denken. Schreibt man dann

$$\omega_1 + \omega_2 \text{ statt } \omega_1, \text{ und } \omega_2 \text{ statt } \omega_2,$$

so geht dabei über:

$$z(n, 1, 0) \text{ in } e^{\frac{ni\pi}{6}} \cdot z(n, 1, 0),$$

$$\sqrt[12]{\Delta} \text{ in } e^{\frac{i\pi}{6}} \sqrt[12]{\Delta},$$

$$g_2 \text{ in } g_2,$$

$$g_3 \text{ in } g_3.$$

Da die Gleichung nach wie vor richtig bleiben muss, so müssen die bei den einzelnen Gliedern vortretenden 12^{ten} Einheitswurzeln untereinander gleich sein; also haben wir:

$$r_i + (N - i) \cdot n \equiv N \cdot n \pmod{12},$$

oder

$$(2) \quad r_i \equiv i \cdot n \pmod{12}.$$

Ausserdem kann

$$(3) \quad r_i < 12$$

vorausgesetzt werden, da anderen Falls die ganze Potenz von Δ , welche hinzutritt, wegen

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2,$$

zur ganzen Function $G_{k_i}(g_2, g_3)$ genommen werden kann.

Aus (1) und (2) folgt noch:

$$(4) \quad k_i \equiv i(1 - n) \pmod{12}.$$

Da r_i wegen (1) nie grösser als i werden kann, so schliessen wir:

Ist der kleinste positive Rest von $i \cdot n \pmod{12}$ grösser als i , so ist der Coefficient von

$$z^{N-i}$$

in der Multiplicatorgleichung identisch Null.

Ist $C \cdot g_2^\alpha \cdot g_3^\beta$ irgend ein Glied einer ganzen Function von g_2 und g_3 , die als Function von ω_1, ω_2 die Dimension $-k$ hat, so ist offenbar

$$4\alpha + 6\beta = k.$$

Diese Gleichung kann für einen durch 4 theilbaren Werth von k nur für gerade Werthe von β , und für ein durch 3 theilbares k nur für durch 3 theilbare Werthe von α befriedigt werden.

Diese Bemerkung in Verbindung mit der Congruenz (4) begründet den Satz:

„Ist $n \equiv 1 \pmod{12}$, so treten in den Coefficienten unserer Gleichung g_2 und g_3 nur in solchen Potenzen auf, deren Exponenten durch 3 resp. 2 theilbar sind; für $n \equiv 5 \pmod{12}$ tritt g_3 nur in geraden Potenzen, für $n \equiv 7 \pmod{12}$ tritt g_2 nur in Potenzen mit durch 3 theilbaren Exponenten auf.“

Oder anders ausgedrückt:

„Der Quotient $\frac{{}^{12}\sqrt{\Delta\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}}{{}^{12}\sqrt{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}$ genügt einer Gleichung N^{ten} Grades.

Die Coefficienten dieser Gleichung sind rationale ganze Functionen von J für $n \equiv 1 \pmod{12}$, von $\sqrt[3]{J}$ für $n \equiv 5 \pmod{12}$, von $\sqrt{J-1}$ für $n \equiv 7 \pmod{12}$, und schliesslich von $\sqrt[3]{J}$ und $\sqrt{J-1}$ für $n \equiv 11 \pmod{12}$.*)

Auch für nur durch eine Potenz von 2 (nicht aber durch 3) oder nur durch eine Potenz von 3 (nicht aber durch 2) theilbare Transformationsgrade finden solche Sätze über die Gestalt der Coefficienten statt.

Für $n = 2^u \cdot m$ (m relativ prim zu 6) enthält die betr. Gleichung nur J oder auch $\sqrt[3]{J}$, je nachdem $n \equiv +1$ oder $-1 \pmod{3}$ ist, und für $n = 3^v \cdot m$ (m relativ prim zu 6) tritt nur J oder auch $\sqrt{J-1}$ auf, je nachdem $n \equiv +1$ oder $-1 \pmod{4}$ ist.

(Vgl. wegen dieses Paragraphen Math. Annalen XV, p. 87 und die mehrfach citirte Arbeit von Kiepert.)

*) Dass die $\sqrt[3]{J}$ und $\sqrt{J-1}$ für $n \geq 1 \pmod{12}$ nicht in solchen Potenzen überall auftreten, dass die Coefficienten rational in J werden, folgt aus dem

Verhalten von $\frac{{}^{12}\sqrt{\Delta\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}}{{}^{12}\sqrt{\Delta(\omega_1, \omega_2)}}$, wenn man statt $\omega_1, \omega_1 + n\omega_2$ setzt.

§ 3.

Das letzte Glied der Multiplicatorgleichung.

Bilden wir das letzte Glied unserer Gleichung (für beliebigen zu 12 primen Transformationsgrad), also das Product P aller Wurzeln, so kommt:

$$P = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^N \cdot (-1)^{\sum \frac{a-1}{2} \cdot \frac{d \cdot \varphi(e)}{e}} \cdot \varepsilon^{\sum \left(a \cdot \left(\frac{1-d^2}{12}\right) \sum b\right)} \cdot \prod a^{\frac{d \cdot \varphi(e)}{e}} \\ \cdot q^{\sum \frac{a}{6d} \cdot \frac{d \varphi(e)}{e}} \prod_{(a, b, d)} \prod (1 - \varepsilon^{va b} q^{\frac{a}{d} \cdot 2v})^2.$$

Hier bedeutet e den grössten gemeinsamen Theiler von a und d .

Zum Verständniss dieser Formel bemerke man, dass für einen stehenden Werth des Theilers a von n , $d = \frac{n}{a}$ bestimmt ist, und b alle $\frac{d \cdot \varphi(e)}{e}$ Zahlen zu durchlaufen hat, die nicht negativ, $< d$ und relativ prim zum grössten gemeinsamen Theiler e von a und d sind.

Um die auftretenden zahlentheoretischen Functionen auszuwerthen, benutzen wir den häufig angewandten Kunstgriff, für dieselben Functionalgleichungen aufzustellen.

Es ist immer, wenn

$$\sum a^\lambda \cdot \frac{(\varphi(e))^\mu}{e^\nu} = \psi(n)$$

gesetzt wird, wo λ, μ, ν beliebige Grössen sind und die Summation über alle Theiler a von n erstreckt wird,

$$\psi(n) \cdot \psi(n_1) = \psi(n \cdot n_1),$$

sofern n und n_1 theilerfremd sind.

Vermöge dieser Eigenschaft von $\psi(n)$ kann man diese Function offenbar sofort aus den Primfactoren von n zusammensetzen. Wir wollen dies indess nur für $\mu = \nu$ ausführen; wir setzen also

$$\psi(n) = \sum a^\lambda \cdot \left(\frac{\varphi(e)}{e}\right)^\mu.$$

Für eine Primzahlpotenz p^k sind die Theiler:

$$1, p, p^2, \dots, p^k,$$

und die zugehörigen Werthe von $\frac{\varphi(e)}{e}$ für den ersten und letzten Theiler 1, für alle übrigen

$$1 - \frac{1}{p}.$$

Daher wird

$$\psi(p^k) = 1 + p^{k \cdot \lambda} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\mu \cdot \frac{p^{\lambda k} - p^\lambda}{p^\lambda - 1},$$

womit auch, wenn

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots$$

ist,

$$\psi(n) = \psi(p_1^{k_1}) \psi(p_2^{k_2}) \dots$$

gefunden ist.

Für $\mu = \lambda = 1$ kommt

$$(1) \quad \sum a \cdot \frac{\varphi(e)}{e} = n \left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2}\right) \dots = N^*),$$

für $\lambda = 0, \mu = 1$:

$$\sum \frac{\varphi(e)}{e} = \prod_i \left(2 + (k_i - 1) \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right).$$

Der Exponent von (-1) in P wird daher:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ n \cdot \sum \frac{\varphi(e)}{e} - \sum \frac{d \cdot \varphi(e)}{e} \right\} \\ &= \frac{1}{2} p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} \dots \left\{ \prod (2p_i + (p_i - 1)(k_i - 1)) - \prod (p_i + 1) \right\} \\ &\equiv \frac{1}{2} \prod (p_i - 1) k_i \equiv \frac{1}{2} \prod (p_i^{k_i} - 1) \pmod{2}. \end{aligned}$$

Da für einen stehenden Werth von a $\sum b$ stets durch d theilbar ist, so ist die in P eingehende n^{te} Einheitswurzel gleich 1.

Aus (1) folgt nun, dass $q^{\frac{N}{6}}$ als Factor in P auftritt. Somit kommt:

$$P = (-1)^{\frac{1}{2} \prod (p_i^{k_i} - 1)} \cdot \prod a^{\frac{d \cdot \varphi(e)}{e}} (\sqrt[12]{\Delta})^N.$$

Es bleibt nur noch übrig, den Zahlenfactor

$$\prod a^{\frac{d \cdot \varphi(e)}{e}} = \prod a^{\frac{n \cdot \varphi(e)}{a \cdot e}} = \chi(n)$$

auszuwerthen.

Sind n und n_1 relativ prim, so ist

$$\chi(n \cdot n_1) = \prod (a \cdot a_1)^{\frac{n \cdot n_1}{a \cdot a_1} \cdot \frac{\varphi(e) \cdot \varphi(e_1)}{e \cdot e_1}},$$

wo sich das Product über alle Theiler a und a_1 von resp. n und n_1 zu erstrecken hat.

Wir spalten jeden einzelnen Factor dieses Productes in zwei Theile:

$$\left(a^{\frac{n}{a} \cdot \frac{\varphi(e)}{e}} \right)^{\frac{n_1}{a_1} \cdot \frac{\varphi(e_1)}{e_1}} \cdot \left(a_1^{\frac{n_1}{a_1} \cdot \frac{\varphi(e_1)}{e_1}} \right)^{\frac{n}{a} \cdot \frac{\varphi(e)}{e}}$$

*) Dedekind, l. c. pag. 288.

und führen die Multiplication bei dem ersten Theile zunächst nach a_1 , dann nach a aus, während beim zweiten Theile gerade die umgekehrte Reihenfolge der Multiplication befolgt werden soll.

Dann ergibt sich mit Benutzung der Formel (1):

$$\chi(n \cdot n_1) = \chi(n)^{N_1} \cdot \chi(n_1)^N,$$

oder

$$\chi(n \cdot n_1)^{\frac{1}{N \cdot N_1}} = \chi(n)^{\frac{1}{N}} \cdot \chi(n_1)^{\frac{1}{N_1}},$$

und folglich

$$\chi(n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_v)^{\frac{1}{N_1 N_2 \cdots N_v}} = \chi(n_1)^{\frac{1}{N_1}} \cdot \chi(n_2)^{\frac{1}{N_2}} \cdots \chi(n_v)^{\frac{1}{N_v}},$$

wenn $n_1, n_2, \dots, n_v$ zu einander relativ prim sind.

Für eine Primzahlpotenz findet man nun:

$$\chi(p^k) = p^{\frac{p^k - 1}{p - 1}},$$

also für ein beliebiges n

$$\chi(n)^{\frac{1}{N}} = \prod_{i=1}^m p_i^{\frac{p_i^{k_i} - 1}{p_i - 1} \cdot \frac{1}{p_i^{k_i} - 1} (p_i + 1)},$$

wenn

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}.$$

Wir erhalten somit schliesslich für das letzte Glied der Multiplicatorgleichung den folgenden Werth:

$$P = (-1)^{\frac{1}{2} \Pi (p_i^{k_i} - 1)} \left(\prod p_i^{\frac{p_i^{k_i} - 1}{(p_i^2 - 1) p_i^{k_i} - 1}} \right)^N \cdot (1^2/\Delta)^N.$$

§ 4.

Verhalten der Multiplicatorgleichung für $g_2 = 0$ und für $g_3 = 0$.

Schon pag. 56 haben wir die Gleichung für $1^2/\Delta(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2)$ dadurch in eine nur Functionen von $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ enthaltende umgewandelt, dass wir dieselbe durch $(1^2/\Delta)^N$ dividirten und also als Unbekannte die Grösse

$$M(\omega) = \frac{1^2/\Delta(\frac{\omega}{n}, 1)}{1^2/\Delta(\omega, 1)} \quad *)$$

*) $M(\omega)$ ist die Grösse, welche als „Multiplicator“ zu bezeichnen ist. Nichtsdestoweniger wollen wir unter „Multiplicatorgleichung“ auch weiterhin immer die Gleichung für $1^2/\Delta(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2)$ verstehen.

einführten. Die Coefficienten der Gleichung für $M(\omega)$ waren dann rationale ganze Functionen von resp. J , $\sqrt[3]{J}$, $\sqrt{J-1}$ oder $\sqrt[3]{J}$ und $\sqrt{J-1}$, je nachdem

$$n \equiv 1, 5, 7, 11 \pmod{12}$$

war. Wir benutzen jetzt diese Gleichung für M um die Multiplicatorgleichung für den Fall zu studiren, dass wir in derselben $g_2 = 0$ (wobei $J = 0$ wird) resp. $g_3 = 0$ (wobei $J = 1$ wird) eintragen. Um aber die Gleichungen zu erhalten, welche entstehen, wenn wir in der Gleichung für M $J = 0$ oder $J = 1$ setzen, können wir in derselben, aufgefasst als Gleichung für ω , dem ω die Werthe ϱ resp. i ertheilen.

Die Untersuchung der Wurzeln dieser speciellen Gleichungen wird daher durch die Untersuchung der Repräsentantenwerthe

$$\frac{a\varrho + b}{d} \quad \text{und} \quad \frac{ai + b}{d} \quad *)$$

resp. zu erledigen sein.

Zunächst können wir sagen:

„Die Repräsentantenwerthe $\frac{a\varrho + b}{d}$ resp. $\frac{ai + b}{d}$ werden sich theils zu je 3 resp. zu je 2 untereinander äquivalenten zusammenschaaren, theils vereinzelt ohne äquivalente vorhanden sein.“

Dieses ist ein unmittelbarer Ausfluss des auf p. 31 angegebenen Verzweigungssatzes (letzterer angewandt auf $J\left(\frac{\omega}{n}\right)$ als Function von $J(\omega)$).

Betrachten wir nun zunächst behufs näherer Durchführung die Repräsentantenwerthe

$$\frac{ai + b}{d}.$$

Es ist

$$\frac{ai + b}{d} = \frac{b \cdot i - a}{d \cdot i}.$$

Und nun ist die Zahl $\frac{b\omega - a}{d\omega}$ mit einem Repräsentanten $\frac{a_1\omega + b_1}{d_1}$ äquivalent, so dass die beiden Repräsentantenwerthe

$$\frac{ai + b}{d} \quad \text{und} \quad \frac{a_1i + b_1}{d_1}$$

äquivalent werden.

*) Dieses (dass wir nämlich auf die *nicht* homogenen Repräsentanten geführt werden) ist der Grund, weshalb wir an Stelle der Multiplicatorgleichung einen Augenblick die Gleichung für M untersuchen.

Des Näheren wird nämlich

$$\begin{pmatrix} b, & -a \\ d, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix},$$

wenn

$$\left. \begin{aligned} b &= \alpha a_1 \\ d &= \gamma a_1 \end{aligned} \right\}; \quad d_1 = \frac{n}{a_1}$$

gesetzt wird, indem man mit a_1 den grössten gemeinsamen Theiler von b und d bezeichnet; wenn ferner die Gleichung

$$\alpha \delta - \beta \gamma = 1$$

durch die Formeln

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \beta_0 + t\alpha \\ \delta &= \delta_0 + t\gamma \end{aligned} \right\}$$

gelöst wird, wo β_0, δ_0 irgend ein Lösungspaar bezeichnen, und wenn man schliesslich die ganze Zahl t so bestimmt, dass

$$b_1 = -a\delta_0 - td_1$$

nicht negativ und $< d_1$ wird.

Es fragt sich nun: Wann können zwei so zusammengehörige Repräsentanten

$$(a, b, d) \quad \text{und} \quad (a_1, b_1, d_1)$$

zusammenfallen?

Dazu ist erforderlich, dass der grösste gemeinsame Theiler a_1 von b und d dem a gleich wird. Somit muss $a = 1$ und b relativ prim zu $d = n$ sein. Es kommen daher nur noch die Werthe

$$\frac{i + b}{n},$$

in Betracht. Die zu $\frac{i + b}{n}$ gehörige Zahl $\frac{a_1 i + b_1}{d_1}$ ist nun nach Obigem

$$= \frac{i + b_1}{n}$$

wo b_1 der kleinste positive Rest von

$$- \delta_0 \pmod{n}$$

ist, und es ist

$$b\delta_0 \equiv 1 \pmod{n}.$$

Soll also auch b mit b_1 übereinstimmen, so muss

$$b^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

sein. Und umgekehrt, ist diese Congruenz erfüllt, so fällt der Repräsentant $(1, b, n)$ mit seinem entsprechenden $(1, b_1, n)$ zusammen.

Für unsere Gleichung ergibt sich demnach:

Die Wurzeln M ordnen sich für $J = 1$ in Paare, wie

$$M = n \cdot e^{[-d \cdot b + 3(a-1)] \frac{i\pi}{6}} \cdot \frac{\sqrt[12]{\Delta(ai + b, d)}}{\sqrt[12]{\Delta(i, 1)}}$$

und

$$M' = n \cdot e^{[-d_1 b_1 + 3(a_1-1)] \frac{i\pi}{6}} \cdot \frac{\sqrt[12]{\Delta(a_1 i + b_1, d_1)}}{\sqrt[12]{\Delta(i, 1)}},$$

welche sich nur um eine 12^{te} Einheitswurzel unterscheiden können. Eine Ausnahme bilden nur diejenigen Wurzeln, welche den Repräsentantenwerthen $\frac{i+b}{n}$ entsprechen, wo b der Congruenz

$$b^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

genügt. Sie bleiben isolirt.

Die 12^{te} Einheitswurzel, um welche sich die eben genannten M und M' unterscheiden, findet man vermöge der Gleichungen pag. 61 oben aus der Formel pag. 44. Es ergibt sich nach leichten Reductionen:

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} M'.$$

Ganz analog verhält es sich mit den Repräsentantenwerthen

$$\frac{a\varrho + b}{d}.$$

Diese ordnen sich, den Gleichungen

$$\frac{a\varrho + b}{d} = \frac{(b-a)\varrho - a}{d \cdot \varrho} = \frac{b \cdot \varrho + (b-a)}{d \cdot \varrho + d}$$

entsprechend, zu je drei einander äquivalenten an

$$\frac{a\varrho + b}{d}, \quad \frac{a_1\varrho + b_1}{d_1}, \quad \frac{a_2\varrho + b_2}{d_2},$$

indem die Zahlen

$$(A) \quad \frac{(b-a)\omega - a}{d \cdot \omega} \quad \text{und} \quad \frac{b\omega + (b-a)}{d \cdot \omega + d}$$

sich 2 Repräsentanten

$$(B) \quad \frac{a_1\omega + b_1}{d_1} \quad \text{resp.} \quad \frac{a_2\omega + b_2}{d_2}$$

äquivalent erweisen.

Die linearen Transformationen, durch welche aus den beiden Repräsentanten (A) die resp. entsprechenden Zahlen (B) hervorgehen, werden wiederum vermöge eines Verfahrens gefunden, das demjenigen analog ist, welches soeben für die Repräsentanten $\frac{ai+b}{d}$ angegeben

wurde. Die einzigen Repräsentantenwerthe, die mit einem ihrer beiden entsprechenden zusammenfallen können, sind die Zahlen

$$\frac{q + b}{n}$$

wo b der Congruenz

$$b^2 + b + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

genügt. Und zwar zeigt sich, dass mit jedem solchen $\frac{q + b}{n}$ beide entsprechenden Repräsentantenwerthe zusammenfallen.

Es folgt also:

Die Wurzel M der aus unserer Gleichung durch die Substitution $J = 0$ entstehenden Gleichung schaaren sich im Allgemeinen zu dreien, wie die folgenden, zusammen:

$$M = n \cdot e^{[-d b + 3(a-1)] \frac{i\pi}{6}} \frac{\sqrt[12]{\Delta(aq + b, d)}}{\sqrt[12]{\Delta(q, 1)}},$$

$$M' = n \cdot e^{[-d_1 b_1 + 3(a_1-1)] \frac{i\pi}{6}} \frac{\sqrt[12]{\Delta(a_1 q + b_1, d_1)}}{\sqrt[12]{\Delta(q, 1)}},$$

$$M'' = n \cdot e^{[-d_2 b_2 + 3(a_2-1)] \frac{i\pi}{6}} \frac{\sqrt[12]{\Delta(a_2 q + b_2, d_2)}}{\sqrt[12]{\Delta(q, 1)}},$$

die sich nur um 12^{te} Einheitswurzeln unterscheiden können. Eine Ausnahme bilden nur die Wurzeln, welche den Zahlen $\frac{q + b}{n}$ entsprechen, wo

$$b^2 + b + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

ist. Sie bleiben isolirt.

Die betr. 12^{ten} Einheitswurzeln berechnen sich nach pag. 44, und es kommt nach einigen Reductionen

$$M = e^{2 \left(\frac{n-1}{2} \right) \frac{i\pi}{3}} M' = e^{4 \left(\frac{n-1}{2} \right) \frac{i\pi}{3}} M''.$$

Auf Grund dieser Entwicklungen können wir nunmehr die Sätze aussprechen:

Wenn $n \equiv 1$ oder $\equiv 5 \pmod{12}$ ist, verwandelt sich die linke Seite der Multiplicatorgleichung für $g_3 = 0$, nach Abtrennung eines Factors vom Grade v , in ein vollständiges Quadrat. — v ist dabei die Zahl der Lösungen der Congruenz

$$b^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}.$$

Wenn $n \equiv 1$, oder $\equiv 7 \pmod{12}$ ist, verwandelt sich die linke Seite unserer Gleichung für $g_2 = 0$, nach Abtrennung eines Factors vom

Grade μ , in einen vollständigen Cubus. — μ ist dabei die Zahl der Lösungen der Congruenz:

$$b^2 + b + 1 \equiv 0 \pmod{n}.*)$$

Ist $n \equiv 11$ oder $\equiv 5 \pmod{12}$, so enthält unsere Gleichung für $g_2 = 0$ nur durch 3 theilbare Potenzen, für $n \equiv 11$ oder $\equiv 7 \pmod{12}$ und $g_3 = 0$ nur durch 2 theilbare Potenzen der Unbekannten.

Das in diesem letzten Satze ausgesprochene Resultat ist aber darum trivial, weil es schon aus der Betrachtung der Dimension der einzelnen Glieder der Gleichung hervorgeht.

§ 5.

Bestimmung der μ resp. ν sich abtrennenden Wurzeln.

Es ist bemerkenswerth, dass man den Werth der μ resp. ν sich abtrennenden Wurzeln der im vorigen Paragraphen behandelten Gleichungen leicht angeben kann.

Sei

$$M = n \cdot e^{-nb \frac{i\pi}{6}} \cdot \frac{\sqrt[12]{\Delta(i+b, n)}}{\sqrt[12]{\Delta(i, 1)}}$$

eine solche Wurzel (für $g_3 = 0$).

Dann genügt b der Congruenz:

$$b^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}.$$

Nennt man nun (indem man in das Gebiet der complexen ganzen Zahlen $\sigma + \tau i$ übergeht) $D - Ci$ den grössten gemeinsamen Theiler von $i + b$ und n , so folgt:

$$\left. \begin{aligned} n &= (D + Ci)(D - Ci) \\ b + i &= (B + Ai)(D - Ci) \end{aligned} \right\},$$

welche Gleichungen die nachfolgenden in sich enthalten:

$$\begin{aligned} n &= D^2 + C^2, \\ b &= AC + BD, \\ AD - BC &= 1. \end{aligned}$$

*) Vgl. Mathem. Annalen Bd. XV, pag. 87 und 88.

Siehe auch wegen der Gruppierung der Repräsentantenwerthe $\frac{ai+b}{d}$ und $\frac{a\varrho+b}{d}$ die Arbeit von Gierster: „Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad“, Math. Annalen, Bd. XIV, p. 536, die jedoch keine Beweise enthält.

Man findet hieraus noch leicht:

$$bC \equiv -D \pmod{n},$$

eine Congruenz, die zeigt, dass nicht nur jedem $b + i$ ein Factor $D + Ci$ einer Zerfällung von n in $(D + Ci)(D - Ci)$ entspricht, sondern dass auch umgekehrt jedem solchen Factor eine und nur eine Zahl b und folglich ein $b + i$ zugehört.

Associirte Zahlen $(D + Ci)$, $i(D + Ci)$, $-(D + Ci)$, $-i(D + Ci)$ sind dabei als *nicht* verschiedene Factoren anzusehen.

Es wird nun

$$M = n \cdot e^{-\frac{nb i \pi}{6}} \cdot \frac{1}{D - Ci} \cdot \frac{\sqrt[12]{\Delta(A \cdot i + B \cdot 1, C \cdot i + D \cdot 1)}}{\sqrt[12]{\Delta(i, 1)}}$$

d. h., da das Zahlenpaar $A \cdot i + B \cdot 1$, $C \cdot i + D \cdot 1$ dem Zahlenpaare i , 1 äquivalent ist,

$$M = \varepsilon \cdot (D + Ci)$$

wo ε nach pag. 44 bestimmt wird, in der dortigen Bezeichnungsweise

$$= e^{-\frac{nb i \pi}{6}} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

ist, und sich als eine 4^{te} Einheitswurzel erweist.

Wir haben also den Satz:

Die μ sich für $g_3 = 0$ abtrennenden einfachen Wurzeln M sind diejenigen complexen Factoren $D + Ci$ und $D - Ci$ von n , welche bei allen möglichen, wesentlich verschiedenen Zerlegungen

$$n = (D + Ci)(D - Ci), \quad (D \text{ und } C \text{ theilerfremd})$$

auftreten, jeder Factor mit einer bestimmten complexen Einheit multiplicirt.

Ganz analog findet man:

Die ν sich für $g_2 = 0$ abtrennenden Wurzeln sind diejenigen complexen Factoren $D + C\varrho$ und $D + C\varrho^2$ von n , welche bei allen möglichen wesentlich verschiedenen Zerlegungen

$$n = (D + C\varrho)(D + C\varrho^2), \quad (D \text{ relativ prim zu } C)$$

auftreten, jeder solche Factor mit einer bestimmten Einheit (± 1 , $\pm \varrho$, $\pm \varrho^2$) multiplicirt.

Hier entspricht jedem Repräsentanten $\frac{\varrho + b}{n}$, für welchen $b^2 + b + 1 \equiv 0 \pmod{n}$, die Wurzel

$$M = \varepsilon (D + C\varrho),$$

wo

$$\varepsilon = e^{-nb \cdot \frac{i\pi}{6}} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

$D + C\varrho^2$ der grösste gemeinsame Theiler von n und $b + \varrho$, und schliesslich

$$n = (D + C\varrho) (D + C\varrho^2),$$

$$b + \varrho = (B + A\varrho) (D + C\varrho^2)$$

ist.

Es ist nicht schwer zu sehen, dass der zweifach resp. dreifach auftretende Factor unserer Gleichung, entsprechend den verschiedenen Divisoren der Zahl n , sich in Factoren mit rationalen Zahlencoefficienten zerlegt. Auch ist leicht nachzuweisen, dass alle diese Gleichungen Abel'sche Gleichungen sind, also algebraisch auflösbar sind.

Ich will jedoch diesen Gegenstand hier nicht weiter verfolgen, indem ich mir vorbehalte, auf denselben bei anderer Gelegenheit (wo diese Sätze sich in allgemeinere Gesichtspunkte einordnen sollen) zurückzukommen. Herr Kiepert hat, wie mir Herr Klein mittheilt, in neuerer Zeit ähnliche, jedoch noch nicht publicirte Untersuchungen angestellt.

§ 6.

Differential-Relation, welcher der Multiplicator $M(\omega)$ genügt.

Wir sahen pag. 38, dass die Formel besteht:

$$\sqrt[6]{\Delta}(\omega_1, \omega_2) = \frac{dJ}{d\omega} \cdot J^{-\frac{2}{3}} \cdot (J-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot i\pi}{3\omega_2^2}.$$

Schreiben wir in dieser Gleichung $\frac{\omega_1}{n}$ statt ω_1 , so kommt:

$$\sqrt[6]{\Delta}\left(\frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right) = n \cdot \frac{dJ'}{d\omega} \cdot J'^{-\frac{2}{3}} \cdot (J'-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot i\pi}{3\omega_2^2}$$

wo

$$J' = J\left(\frac{\omega}{n}\right)$$

ist. Durch Division dieser beiden Formeln entsteht nun:

$$M^2 = n \cdot \frac{dJ'}{dJ} \cdot \frac{J^{\frac{2}{3}} (J-1)^{\frac{1}{2}}}{J'^{\frac{2}{3}} (J'-1)^{\frac{1}{2}}}, *)$$

eine Relation, die dem bekannten differentiellen Ausdruck des Jacobi'schen Multiplicators ganz analog ist.

*) Mathem. Annalen XIV, pag. 145. Siehe auch Brioschi, Atti della Accademia dei Lincei, vol. II. ser. 3, Sitzung vom 3. März 1878.

Anmerkung: Diese Relation wird für diejenige Methode zur Aufstellung der Transformationsgleichung zwischen J und J' von Wichtigkeit, welche Herr

§ 7.

Numerische Beispiele.

Zum Schluss will ich noch eine kleine Zahl von wirklich ausgerechneten Multiplicatorgleichungen zusammenstellen. Sie haben den Zweck, Material zu bieten, um die in abstracto entwickelten Sätze an concreten Beispielen prüfen zu können.

Vorab jedoch will ich einen zur numerischen Berechnung der Gleichungen für primzahlige Transformation dienenden allgemeinen Ansatz hersetzen, um an ihn einige Bemerkungen anzuknüpfen.

Die Wurzeln der Multiplicatorgleichung sind, wenn der Transformationsgrad n Primzahl ist:

$$z_k = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right) \varepsilon^{k\left(\frac{1-n^2}{12}\right)} q^{\frac{1}{6n}} \prod \left(1 - \varepsilon^{vk} q^{\frac{2}{n}v}\right)^2$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

und

$$z_\infty = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right) \cdot n(-1)^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{n}{6}} \prod (1 - q^{2nv})^2.$$

Klein im Anschluss an seine Darstellung dieser Gleichung für die niedersten Fälle ($n = 2, 3, 4, 5, 7, 13$; Mathem. Annalen XIV, pag. 141–146) allgemein vorschlägt. Sein Gedankengang ist folgender:

Man setze in der nöthigenfalls (also für $n \equiv 5, 7, 11 \pmod{12}$) in $J(\omega)$ rational gemachten Gleichung für $M(\omega)$

$$(1) \quad f(M, J) = 0,$$

$$-\frac{n}{\omega} \text{ statt } \omega \text{ ein.}$$

Dann geht dieselbe, wie man leicht erkennt, über in:

$$(2) \quad f\left(\frac{n}{M}, J'\right) = 0.$$

In den Fällen $n = 2, 3, 4, 5, 7, 13$ genügten die Gleichungen (1) und (2), um die Relation zwischen J und J' als Resultat der Elimination von M zu definieren (l. c.). Im allgemeinen Falle wird diese Relation jedoch nur ein Factor des Eliminationsresultats sein, und es fragt sich, wie man diesen findet. Hierzu liefert nun offenbar unsere neue Relation

$$M^2 = n \cdot \frac{dJ'}{dJ} \cdot \frac{J^{\frac{2}{3}}(J-1)^{\frac{1}{2}}}{J'^{\frac{2}{3}}(J'-1)^{\frac{1}{2}}}$$

einen Beitrag. Ob dieselbe aber zur Absonderung des gewünschten Factors ausreicht, muss vorab dahingestellt bleiben.

Setzt man nun

$$\prod (1 - x^v)^{2\lambda} = \sum_{\varrho=0}^{\infty} C_{\varrho}^{(\lambda)} x^{\varrho}$$

so wird

$$\begin{aligned} S_{\lambda} &= \left(\sum_{z=0}^{n-1} z^{\lambda} \right) + z_{\infty}^{\lambda} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\omega_2} \right)^{\lambda} \cdot n \cdot q^{\frac{n\lambda}{6} - 2v} \left[\sum_{t=0}^{\infty} C_{tn+\alpha}^{(\lambda)} q^{2t} + (-1)^{\lambda} \cdot n^{\lambda-1} q^{2v} \sum_{t=0}^{\infty} C_t^{(\lambda)} q^{2nt} \right]. \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet

$$v = \left[\lambda \cdot \frac{n^2 - 1}{12n} \right]$$

die grösste in $\lambda \cdot \frac{n^2 - 1}{12 \cdot n}$ enthaltene ganze Zahl, und es ist

$$\alpha = \lambda \cdot \frac{n^2 - 1}{12} - nv.$$

Diese Formel hat zunächst den Vorthail, dass sie a priori erkennen lässt, welche Potenz von $\sqrt[12]{\Delta}$ absolut genommen als Factor vor die ganze Function von g_2 und g_3 , der S_{λ} bis auf eine Potenz von $\sqrt[12]{\Delta}$ gleich ist, vortritt. — Eine zweite Bemerkung ist folgende:

Man kennt (aus der Theorie der elliptischen Functionen) nur die Reihenentwicklungen von

$$\prod (1 - x^v) \quad \text{und} \quad \prod (1 - x^v)^3.$$

Vermöge des obigen Ansatzes liefern nun offenbar die Multiplicatorgleichungen unendlich viele Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten der Reihenentwicklung von $\prod (1 - x^v)^{2\lambda}$, Gleichungen, die z. B. als Eigenschaften der fünfeckigen Zahlen ausgesprochen werden können. Da ich aber in dieser Richtung einen allgemeinen Satz vermuthe, von dem die auf dem angegebenen Wege erhaltenen Sätze particuläre Fälle sein würden, so will ich die letzteren hier unterdrücken, um bei Gelegenheit auf dieselben zurückzukommen. —

Multiplicatorgleichung

für $n = 2$:

$$z^{12} - 12 g_2 \cdot \Delta^{\frac{1}{3}} \cdot z^4 + 16 \Delta = 0,$$

für $n = 3$:

$$z^{12} - 18 \Delta^{\frac{6}{12}} \cdot z^6 + 216 g_3 \cdot \Delta^{\frac{3}{12}} \cdot z^3 - 27 \Delta = 0,$$

für $n = 4$:

$$z^{24} - 48 \Delta^{\frac{1}{3}} \cdot z^{20} + 16 \cdot 51 \Delta^{\frac{2}{3}} \cdot z^{16} - 16 \cdot 22 \Delta \cdot z^{12} + 3 \cdot 64 \Delta^{\frac{4}{3}} (68 \Delta - 9g_2^3) \cdot z^8 \\ - 4^5 \cdot 3 (4 \Delta - 9g_2^3) \Delta^{\frac{2}{3}} \cdot z^4 + 4^6 \Delta^2 = 0,$$

für $n = 5$:

$$z^6 + 10 \Delta^{\frac{1}{4}} \cdot z^3 - 12g_2 \cdot \Delta^{\frac{1}{12}} \cdot z + 5 \Delta^{\frac{1}{2}} = 0,$$

für $n = 7$:

$$z^8 + 14 \Delta^{\frac{1}{6}} \cdot z^6 + 63 \Delta^{\frac{1}{3}} \cdot z^4 + 70 \Delta^{\frac{1}{2}} \cdot z^2 + 216g_3 \cdot \Delta^{\frac{1}{12}} \cdot z - 7 \Delta^{\frac{2}{3}} = 0,$$

für $n = 11$:

$$z^{12} - 90 \cdot 11 \Delta^{\frac{1}{2}} \cdot z^6 + 40 \cdot 11 \cdot 12g_2 \cdot \Delta^{\frac{1}{3}} \cdot z^4 - 15 \cdot 11 \cdot 216g_3 \cdot \Delta^{\frac{1}{4}} \cdot z^3 \\ + 2 \cdot 11 \cdot (12g_2)^2 \cdot \Delta^{\frac{1}{6}} \cdot z^2 - 12g_2 \cdot 216g_3 \cdot \Delta^{\frac{1}{12}} \cdot z - 11 \Delta = 0,$$

für $n = 13$:

$$z^{14} + 13 \left[2 \Delta^{\frac{1}{12}} \cdot z^{13} + 25 \Delta^{\frac{2}{12}} \cdot z^{12} + 196 \Delta^{\frac{3}{12}} \cdot z^{11} + 1064 \Delta^{\frac{4}{12}} \cdot z^{10} \right. \\ \left. + 4180 \Delta^{\frac{5}{12}} \cdot z^9 + 12086 \Delta^{\frac{6}{12}} \cdot z^8 + 25660 \Delta^{\frac{7}{12}} \cdot z^7 + 39182 \Delta^{\frac{8}{12}} \cdot z^6 \right. \\ \left. + 41140 \Delta^{\frac{9}{12}} \cdot z^5 + 27272 \Delta^{\frac{10}{12}} \cdot z^4 + 9604 \Delta^{\frac{11}{12}} \cdot z^3 + 1165 \Delta \cdot z^2 \right] \\ + \{746 \Delta - (12g_2)^3\} \Delta^{\frac{1}{12}} \cdot z + 13 \Delta^{\frac{14}{12}} = 0,$$

für $n = 17$:

$$z^{18} + 17 \left[10 \Delta^{\frac{3}{12}} \cdot z^{15} + 2 \cdot 12g_2 \cdot \Delta^{\frac{1}{12}} \cdot z^{13} + 751 \Delta^{\frac{6}{12}} \cdot z^{12} \right. \\ \left. + 184 \cdot 12g_2 \cdot \Delta^{\frac{4}{12}} \cdot z^{10} + 25740 \Delta^{\frac{9}{12}} \cdot z^9 + 17 \cdot (12g_2)^2 \cdot \Delta^{\frac{2}{12}} \cdot z^8 \right. \\ \left. + 8780 \cdot 12g_2 \cdot \Delta^{\frac{7}{12}} \cdot z^7 + 323903 \Delta^{\frac{12}{12}} \cdot z^6 - 1474 \cdot (12g_2)^2 \cdot \Delta^{\frac{5}{12}} \cdot z^5 \right. \\ \left. + 99128 \cdot 12g_2 \cdot \Delta^{\frac{10}{12}} \cdot z^4 + \{20 \cdot (12g_2)^3 - 592310 \Delta\} \Delta^{\frac{3}{12}} \cdot z^3 \right. \\ \left. + 481 \cdot (12g_2)^2 \cdot \Delta^{\frac{8}{12}} \cdot z^2 \right] + [994 \cdot 12g_2 \cdot \Delta - (12g_2)^4] \Delta^{\frac{1}{12}} \cdot z \\ + 17 \Delta^{\frac{18}{12}} = 0.$$

Die Gleichungen für 2, 3, 4, 5, 7, 13 finden sich im Wesentlichen

Mathem. Annalen Bd. XIV, p. 143 und 146; jedoch ist in den Formeln (26) p. 146 daselbst zu setzen: $n = 2$, $\tau = -\frac{1}{64}M^{12}$ und $n = 5$, $\tau = -125M^3$.

Die Formel für $n = 11$ ist Mathem. Annalen XV, pag. 88 mitgetheilt. Der Fall $n = 17$ ist der Arbeit von Kiepert entlehnt (Crelle 87, pag. 215), wo auch $n = 19$ und 23 berechnet sind.

Wegen weiterer Beispiele siehe Gierster, l. c. p. 541, 542 u. 543.

Leipzig, im März 1881.

VITA.

Am 26. März 1859 als Sohn des Kaufmanns Salomon Hurwitz (jüdischer Confession) geboren, verlebte ich meine Kinderjahre in meiner Geburtsstadt Hildesheim (Provinz Hannover).

Als achtjähriger Knabe wurde ich in die Septima des Andreanums daselbst aufgenommen und ich besuchte diese Anstalt bis Ostern 1877, wo ich aus der Prima der Realschule I. Ordnung des Andreanums mit dem Zeugniss der Reife entlassen wurde.

In Tertia erhielt ich bei Herrn Oberlehrer Dr. Schubert (jetzt an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg) Unterricht in der Mathematik, und seinem anregenden Einfluss war es zu verdanken, dass bald die Mathematik mein Lieblingsfach wurde. Von Secunda ab trat Herr Schubert mit mir in persönlichen Verkehr und führte mich in die neuere (synthetische) Geometrie ein, vor allem aber auch in seine eigenen Untersuchungen über abzählende Geometrie, die mich bald zu selbstständigem Forschen anregten.

Die Erinnerung an diese meine letzten Schuljahre erfüllt mich mit dem wärmsten Gefühle des Dankes für meinen lieben, hochverehrten Lehrer, und es ist mir eine Freude, dieses hier aussprechen zu dürfen.

Ostern 1877 bezog ich die Universität München, vornehmlich um an der technischen Hochschule daselbst die Vorlesungen des Herrn Prof. Klein zu hören.

Als ich in den Sommerferien nach Hause zurückkehrte, bekam ich den Typhus. An den Nachfolgen dieser Krankheit hatte ich während meiner ganzen Studienzeit zu leiden.

Im Winter 1877/78 ging ich nach Berlin, woselbst ich Vorlesungen der Herren Kummer, Weierstrass, Kronecker, Helmholtz, Kirchhoff und Zeller hörte und während zweier Semester dem von Kummer und Weierstrass geleiteten mathematischen Seminar als actives Mitglied angehörte.

Im Sommer 1879 ging ich wieder nach München, nachdem ich während des vergangenen Winters mit Herrn Klein in lebhafter wissenschaftlicher Correspondenz gestanden hatte.

Hier hörte ich ausser Vorlesungen bei Bauer, Seydel, Pringsheim, Brill, Beetz, namentlich die Vorlesungen des Herrn Klein über seine eigenen Untersuchungen, die mich in hohem Masse fesselten.

Im Frühjahr 1880 war ich durch heftiges Kopfleiden gezwungen, die Studien abubrechen, um den Sommer ganz meiner Gesundheit zu widmen.

Darauf ging ich im Winter 1880/81 nach Leipzig, wohin Herr Professor Klein berufen war. Hier hörte ich noch die Vorlesungen von Wundt (Logik) und Klein, und nahm Theil an dem mathematischen Colloquium des Letzteren, dessen ständiges Mitglied ich übrigens schon seit Sommer 1879 gewesen war.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Klein, fühle ich mich durch seine stete Theilnahme an meinen mathematischen Bestrebungen zu grösstem Danke verpflichtet, dem ich mit Freuden hier Ausdruck verleihe.

Hier hörte ich ausser Vorlesungen bei Bauer, Seydel, Pringsheim, Brill, Beetz, namentlich die Vorlesungen des Herrn Klein über seine eigenen Untersuchungen, die mich in hohem Masse fesselten.

Im Frühjahr 1880 war ich durch heftiges Kopfleiden gezwungen, die Studien abubrechen, um den Sommer ganz meiner Gesundheit zu widmen.

Darauf ging ich im Winter 1880/81 nach Leipzig, wohin Herr Professor Klein berufen war. Hier hörte ich noch die Vorlesungen von Wundt (Logik) und Klein, und nahm Theil an dem mathematischen Colloquium des Letzteren, dessen ständiges Mitglied ich übrigens schon seit Sommer 1879 gewesen war.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Klein, fühle ich mich durch seine stete Theilnahme an meinen mathematischen Bestrebungen zu grösstem Danke verpflichtet, dem ich mit Freuden hier Ausdruck verleihe.

Hurwitz, Adolf

Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen
und Theorie der Multiplicator-Gleichungen erster Stufe Inaug.-Dissertation

Leipzig 1881

Math.p. 201 mx#Beibd.4

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650974-8